On Lang and Vojta's conjectures

CIRM, Luminy, March 03-07 2014

Organizers : Michel Laurent, Guillaume Rond, Erwan Rousseau.

1 List of mini-courses

1. **P. Corvaja : La conjecture de Vojta sur la dégéneresecence des points entiers**

   Soient X une variété algébrique lisse définie sur un corps de nombres k, D un diviseur effectif réduit à croisements normaux, K_X un diviseur canonique de X. Une célèbre conjecture de Lang-Vojta affirme que si la somme $D + K_X$ est presque ample, alors l'ensemble des points k-rationnels de X qui sont entiers par rapport au diviseur D ne sont pas Zariski-dense.

   Le cas uni-dimensionnel ayant été prouvé, avant même la formulation de la conjecture par Vojta, on traitera certains cas en dimension supérieure. En particulier, en utilisant le théorème du sous-espace de Schmidt et Schlickewei, on montrera la solution de plusieurs cas en dimension deux.
   L'analogue sur les corps de fonctions sera aussi mentionné.

   Références bibliographiques :

   – [1] P. Vojta, Diophantine Approximation and Nevanlinna Theory, in *Arithmetic Geometry*, Cetraro 2007 (P. Corvaja and C. Gasbarri Eds.), Lecture Notes in Mathematics 2009, Springer Verlag 2011.
   – [2] P. Corvaja, U. Zannier, A subspace theorem approach to integral points on curves, *Comptes Rendus Math. Acad. Sci. Paris*, **334** (2002), 267-271.
   – [3] P. Corvaja, U. Zannier, On integral points on surfaces, *Annals of Math.*, **160** (2004), 705-726.
   – [4] A. Levin, Generalizations of Siegel's and Picard theorems, *Ann. of Math.* **170** (2009) 609–655.

– [5] P. Corvaja, U. Zannier, Integral points, divisibility between values of polynomials and entire curves on surfaces. *Adv. Math.* **225** (2010), no. 2, 1095–1118.
– [6] P. Corvaja, U. Zannier, Algebraic hyperbolicity of ramified covers of ${\mathbb{G}_m}^2$, to appear on *J. Diff. Geom.*
– [7] P. Autissier, Sur la non-densité des points entiers. *Duke Math. J.* **158** (2011), no. 1, 13–27

2. **C. Gasbarri : Arithmetic of algebraic points on varieties over function fields.**

   We will explain some results about the arithmetic structure of algebraic points over a variety defined over a function fields in one variable. In particular we will introduce the weak and strong Vojta conjectures and explain some consequences of them. We will expose some recent developments on the subject : Curves, Varieties with ample cotangent bundle, curves in positive characteirstic, hypersurfaces.... If there is time we will explain some analogues over number fields.

3. **P. Habegger : Unlikely Intersections in Diophantine Geometry.**
   Suppose that A is either an abelian variety or an algebraic torus. Conjectures on Unlikely Intersections due to Zilber and Pink describe the intersection of a subvariety of A with certain algebraic subgroups. Although open, they imply many established results in Diophantine Geometry such as Faltings Theorem, also known as the Mordell Conjecture. In this series of lectures I will discuss recent approaches towards these conjectures by various people including André, Bombieri, Maurin, Masser, Pila, Rémond, Viada, Zannier and myself. The arguments involve heights, ideas from transcendence theory, but also o-minimal structures from mathematical logic.

4. **G. Rémond : Points rationnels des sous-variétés des variétés abéliennes.**
   Soit A une variété abélienne sur un corps de nombres K. Soit X une sous-variété de A. Si X n'est pas le translaté d'une sous-variété abélienne de A (ce qui revient à dire que X n'est pas elle-même isomorphe à une variété abélienne) alors l'ensemble des points rationnels $X(K)$ n'est pas dense dans X. Ce résultat, établi par Faltings, est l'un des rares cas connus de la conjecture de Lang sur les variétés de type général. L'objectif ici est de décrire la preuve de Faltings, qui généralise celle que Vojta avait donnée de la conjecture de Mordell (cas $\dim X = 1$). Le cœur de l'argument repose sur la théorie des hauteurs et peut être résumé dans une inégalité entre différentes hauteurs. Des inégalités de ce type interviennent aussi pour étudier des intersections plus générales que $X(K) = X \cap A(K)$ qui seront brièvement evoquées.