

OBSERVABILITÉ UNIFORME DE L'ÉQUATION DES ONDES 1D

PAOLA LORETI¹ ET MICHEL MEHREMBERGER²

Résumé. Cet acte est un complément de [7]. Dans [7], de nouveaux théorèmes d'Ingham ont été établis pour obtenir l'observabilité uniforme de l'équation des ondes 1D. Nous rassemblons ici, sous forme compacte et auto-contenue, plusieurs résultats obtenus à l'aide des multiplicateurs discrets. D'autre part, nous établissons un exemple d'inégalité de type Ingham où la position de l'intervalle joue un rôle dans la détermination du temps optimal, ce qui n'est habituellement pas le cas. L'exemple en question renforce l'idée que ce phénomène, déjà évoqué dans [7], peut apparaître.

Abstract. This proceedings is a complement of [7]. In [7], new Ingham type theorems have been developed in order to establish the uniform observability of the wave equation in 1D. We gather here in a self-contained and compact form several results obtained by the mean of discrete multipliers. In a second part, we give an example of Ingham type inequality where the position of the interval is a key point in the determination of the optimal time. This example enforces the idea that such phenomenon, already mentioned in [7], can occur.

INTRODUCTION

On considère l'équation des ondes 1D

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ u(t, 0) = 0, \quad u(t, 1) = 0, & 0 < t < T \\ u(0, x) = u^0(x), \quad u_t(x, 0) = u^1(x), & 0 < x < 1, \end{cases} \quad (1)$$

qui admet une unique solution $u \in C([0, T]; H_0^1(0, 1)) \cap C^1([0, T]; L^2(0, 1))$, pour $(u_0, u_1) \in H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$. L'énergie de la solution est donnée par

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 |u_t(t, x)|^2 + |u_x(t, x)|^2 dt,$$

Article published by EDP Sciences and available at <http://www.edpsciences.org/prtc> or <http://dx.doi.org/10.1051/proc/082505>, on a l'inégalité d'observabilité

$$E(0) \leq C(T) \int_0^T |u_x(t, 1)|^2 dt, \quad (2)$$

pour chaque solution u de (1), avec une constante $C(T) > 0$ indépendante de la condition initiale (u_0, u_1) . Cette inégalité signifie que l'énergie de la solution peut être estimée par l'énergie concentrée en l'extrémité $x = 1$ de

¹ Dipartimento di Metodi e Modelli Matematici per le Scienze Applicate, Sapienza Università di Roma, Via A. Scarpa 16, 00161 Roma, Italy, loreti@dmmm.uniroma1.it

² ULP-IRMA 7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg, mehrenbe@math.u-strasbg.fr

la frontière et est également liée à la contrôlabilité frontière de l'équation des ondes (voir par exemple [8]). Chaque solution u de (1) satisfait aussi une propriété supplémentaire de régularité

$$\int_0^T |u_x(t, 1)|^2 dt \leq C(T)E(0), \quad (3)$$

avec une autre constante $C(T) > 0$. Cette dernière inégalité est souvent appelée *inégalité directe*, alors que la première est aussi appelée *inégalité inverse* (cf [9]). L'inégalité directe est importante pour résoudre le problème frontière non homogène.

Le schéma aux différences finies. On considère maintenant la semi-discrétisation classique de l'équation des ondes $1D$, avec $N \in \mathbb{N}^*$ impair et $h := 1/(N + 1)$:

$$\begin{cases} u_j'' = \frac{1}{h^2} (u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}), & 0 < t < T, \quad j = 1, 2, \dots, N \\ u_0 = u_{N+1} = 0, & 0 < t < T \\ u_j(0) = u_j^0, \quad u_j'(0) = u_j^1, & j = 0, \dots, N + 1. \end{cases} \quad (4)$$

Pour chaque condition initiale $(u_j^0, u_j^1)_{j=0}^{N+1}$ satisfaisant $u_0^0 = u_{N+1}^0 = u_0^1 = u_{N+1}^1 = 0$, le système (4) admet une unique solution, qui est explicitement donnée par

$$u_j(t) = \sum_{|k|=1}^N a_k e^{i\lambda_k^0 t} e_j^{|k|}, \quad e_j^{|k|} = \sin(j|k|\pi h), \quad \lambda_k^0 = \frac{2}{h} \sin(k\frac{\pi h}{2}), \quad (5)$$

où les coefficients $(a_k)_{|k|=1}^N$ sont uniquement déterminés par les relations

$$u_j^0 = \sum_{k=1}^N (a_k + a_{-k}) e_j^k, \quad u_j^1 = \sum_{k=1}^N i\lambda_k^0 (a_k - a_{-k}) e_j^k, \quad j = 1, \dots, N. \quad (6)$$

L'énergie du système est donnée par :

$$E_h^0(t) = \frac{h}{2} \sum_{j=0}^N \left[|u_j'|^2 + \left| \frac{u_{j+1}(t) - u_j(t)}{h} \right|^2 \right], \quad (7)$$

et est une discrétisation de l'énergie continue. Elle est aussi constante en temps : $E_h^0(t) = E_h^0(0)$, $0 < t < T$. On cherche maintenant une version semi-discrète de (2), c'est-à-dire, une *inégalité d'observabilité uniforme* : a-t-on

$$C(T)E_h^0(0) \leq \int_0^T \left| \frac{u_N(t)}{h} \right|^2 dt, \quad (8)$$

avec une constante $C(T) > 0$ indépendante des conditions initiales et de h ? Une telle inégalité est aussi liée à l'approximation numérique semi-discrète du contrôle frontière de l'équation des ondes en $1D$, qui a été intensément étudié ces derniers temps (cf [18]). La principale propriété et difficulté ici est que la constante $C(T)$ générique doit être indépendante du pas de discrétisation h . Comme dans le cas continu, on peut aussi chercher à obtenir une *inégalité directe* : a-t-on

$$\int_0^T \left| \frac{u_N(t)}{h} \right|^2 dt \leq C(T)E_h^0(0) \quad (9)$$

avec une constante $C(T) > 0$ indépendante des conditions initiales et de h ?

Le θ -schéma. Soit $0 \leq \theta \leq 1/4$. Le θ -schéma est une généralisation du schéma précédent et a été introduit dans [13]. Il est obtenu en remplaçant u_j'' avec $u_j'' + \theta(u_{j+1}'' - 2u_j'' + u_{j-1}'')$ dans (4) :

$$\begin{cases} u_j'' + \theta(u_{j+1}'' - 2u_j'' + u_{j-1}'') = \frac{1}{h^2} (u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}), & 0 < t < T, \quad j = 1, 2, \dots, N \\ u_0 = u_{N+1} = 0, & 0 < t < T \\ u_j(0) = u_j^0, \quad u_j'(0) = u_j^1, & j = 0, \dots, N + 1. \end{cases} \quad (10)$$

Notons que le schéma aux différences finies correspond au cas $\theta = 0$. La valeur $\theta = 1/6$ correspond à une semi-discrétisation par éléments finis (voir par exemple [15]), et la valeur $\theta = 1/4$ peut aussi être dérivée à partir d'une méthode d'éléments finis, en discrétisant la position et la vitesse de manière différente, et est appelée méthode d'éléments finis mixtes (voir [1]).

La solution peut être exprimée en série de Fourier comme dans (5), en remplaçant λ_k^0 par λ_k^θ qui satisfait

$$-(\lambda_k^\theta)^2 + \theta h^2 (\lambda_k^\theta)^2 (\lambda_k^0)^2 = -(\lambda_k^0)^2. \quad (11)$$

L'énergie du système est donnée par

$$E_h^\theta(t) = \frac{h}{2} \sum_{j=1}^N |u_j'|^2 - \theta |u_{j+1}' - u_j'|^2 + \left| \frac{u_{j+1} - u_j}{h} \right|^2, \quad (12)$$

et satisfait $E_h^\theta(t) = E_h^\theta(0)$, pour $0 < t < T$.

L'observabilité uniforme est alors : a-t-on

$$C(T)E_h^\theta(0) \leq \int_0^T \left| \frac{u_N(t)}{h} \right|^2 dt + \theta \int_0^T |u_N'(t)|^2 dt, \quad (13)$$

avec une constante $C(T) > 0$ indépendante des conditions initiales et de h ?

L'inégalité directe est : a-t-on

$$\int_0^T \left| \frac{u_N(t)}{h} \right|^2 dt + \theta \int_0^T |u_N'(t)|^2 dt \leq C(T)E_h^\theta(0), \quad (14)$$

avec une constante $C(T) > 0$ indépendante des conditions initiales et de h ?

Il est maintenant bien connu que l'observabilité uniforme peut ne pas avoir lieu pour les semi-discrétisations classiques par l'effet de solutions numériques avec des modes de hautes fréquences parasites, et plusieurs méthodes ont été développées et analysées ces dernières années.

La méthode de filtrage. Un remède est de filtrer les hautes fréquences, comme cela a été introduit dans [5]. Plus précisément, pour $0 < \alpha < 1$, on peut considérer le sous-espace des solutions de (4) ou (10) satisfaisant

$$a_k = 0, \quad |k| \geq \alpha N.$$

La méthode à deux grilles. On peut aussi retrouver l'observabilité uniforme en modifiant les conditions initiales. Une méthode consiste à utiliser une grille fine et une grille grossière et de projeter les données initiales de la grille fine sur la grille grossière. Il s'agit de la méthode à deux grilles qui a été proposée par Glowinski [3] (dans le contexte des discrétisations complètes par éléments finis et différences finis en $2D$) et en premier analysée par Negreanu et Zuazua [16], avec une approche de type multiplicateurs discrets, comme nous allons le voir.

On suppose que $N \in \mathbb{N}^*$ est un nombre impair. Considérons donc des conditions initiales satisfaisant

$$u_{2k+1}^0 = \frac{u_{2k}^0 + u_{2k+2}^0}{2}, \quad u_{2k+1}^1 = \frac{u_{2k}^1 + u_{2k+2}^1}{2}, \quad k = 0, \dots, \frac{N-1}{2}. \quad (15)$$

La méthode des éléments finis mixtes. Il s'agit du θ -schéma, lorsque $\theta = 1/4$. Il a été analysé par [1].

Autres méthodes. Il existe également d'autres moyens de retrouver l'observabilité uniforme : régularisation de Tychonoff [2], qui consiste à rajouter un terme agissant à l'intérieur du domaine et disparaissant lorsque la taille de maille tend vers zéro, l'ajout d'un terme de viscosité (voir [17] dans le cas de problèmes de stabilisation), l'utilisation de données initiales analytiques [12]. On réfère aussi le lecteur à [18], pour un aperçu des méthodes existantes.

L'observabilité uniforme, dans le contexte des semi-discrétisations de l'équation des ondes $1D$ a été étudiée dans plusieurs travaux récents : [5], [12], [1], [14], [16], [15]. Essentiellement deux sortes de méthodes ont été utilisées pour prouver l'observabilité uniforme.

La méthode des multiplicateurs. Elle consiste à établir des identités pour les solutions considérées pour lesquelles l'observabilité uniforme est dérivée. Le moyen d'obtenir ces identités est d'utiliser l'équation, des intégrations par parties et des sommes télescopiques dans le cas semi-discret (qui sont en fait un analogue de l'intégration par parties au niveau discret).

Approche de type Ingham. Elle consiste à utiliser la solution sous forme de série de Fourier et d'utiliser ensuite un théorème d'Ingham [6] ou une variante (cf [7]).

Notons qu'il existe aussi d'autres méthodes pour prouver l'observabilité uniforme : voir par exemple [12], [4]. Toutes les questions mentionnées ici peuvent être posées pour d'autres équations et en dimension plus élevées, pour des discrétisations complètes, mais nous allons ici seulement traiter le cas de la semi-discrétisation de l'équation des ondes $1D$.

Pour la suite, nous allons rappeler la preuve de plusieurs résultats d'observabilité uniforme obtenus par la méthode des multiplicateurs. le but est de rassembler plusieurs résultats et preuves dans une forme compacte et auto contenue (certains de ces résultats peuvent aussi être trouvés dans [7]).

La méthode des multiplicateurs ne donne généralement pas le temps optimal pour l'observabilité uniforme. Ainsi, par exemple, à l'aide des multiplicateurs discrets, on peut établir que (8) est vérifié pour des conditions initiales satisfaisant (15) pour tout temps $T > 4$. Ce temps peut être amélioré à $T > 2\sqrt{2}$ en utilisant une approche de type Ingham (cf [7]), et il a été montré dans [7] que ce temps est optimal, si l'on remplace l'intervalle $[0, T]$ par l'intervalle $[-T/2, T/2]$, et un exemple est exhibé dans un cas simplifié où le temps d'observation dépend de la position de l'intervalle.

Dans une dernière partie, on étudie de manière exhaustive la dépendance du temps optimal d'observation par rapport à la position de l'intervalle pour une inégalité similaire.

1. L'INÉGALITÉ DIRECTE

L'inégalité directe a été prouvée pour $\theta = 0$ dans [5] et [12], pour $\theta = 1/4$ dans [1], et pour $\theta = 1/6$ dans [15] (et est aussi contenue dans [5]).

Le schéma aux différences finies. On utilise d'abord les conditions aux bords $u_0 = u_{N+1} = 0$ de (4). Les calculs algébriques suivants correspondent alors à une intégration par parties discrète. On a tout d'abord

$$(N+1)u_N^2 = \sum_{j=0}^N (j+1)(u_{j+1} - u_j)^2 - \sum_{j=0}^{N-1} (j+1)(u_{j+1} - u_j)^2,$$

puis en découpant la première somme et avec un changement d'indice dans la deuxième somme, on a

$$(N+1)u_N^2 = \sum_{j=0}^N (u_{j+1} - u_j)^2 + \sum_{j=0}^N j(u_{j+1} - u_j)^2 - \sum_{j=1}^N j(u_j - u_{j-1})^2,$$

ce qui donne

$$(N+1)u_N^2 = \sum_{j=0}^N (u_{j+1} - u_j)^2 + \sum_{j=1}^N j(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1})(u_{j+1} - u_{j-1})$$

On utilise alors la relation $u_j'' = \frac{1}{h^2}(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1})$ de (4) pour obtenir

$$(N+1)u_N^2 = \sum_{j=0}^N (u_{j+1} - u_j)^2 + \sum_{j=1}^N jh^2 u_j'' (u_{j+1} - u_{j-1}).$$

On fait ensuite une intégration par parties en temps :

$$\int_0^T j u_j'' (u_{j+1} - u_{j-1}) dt = - \int_0^T j u_j' (u_{j+1}' - u_{j-1}') dt + j u_j' (u_{j+1} - u_{j-1}) \Big|_0^T,$$

De manière algébrique, comme précédemment, on obtient

$$- \sum_{j=0}^N u_j' j (u_{j+1}' - u_{j-1}') = - \sum_{j=0}^N j u_j' u_{j+1}' + \sum_{j=0}^N (j+1) u_{j+1}' u_j' = \sum_{j=0}^N u_j' u_{j+1}' = \sum_{j=0}^N |u_j'|^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^N (u_j' - u_{j+1}')^2.$$

En posant $X_h(t) = h \sum_{j=1}^N j (u_{j+1} - u_{j-1}) u_j'$, et en reprenant les 3 précédentes égalités, on a finalement l'identité

$$\int_0^T \left| \frac{u_N(t)}{h} \right|^2 dt = 2T E_h(0) + X_h(t) \Big|_0^T - \frac{h}{2} \sum_{j=0}^N \int_0^T |u_{j+1}' - u_j'|^2 dt$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité triangulaire puis l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a l'estimation

$$|X_h(t)| \leq h \left(\sum_{j=0}^N |j(u_{j+1} - u_j) u_j'| + |j(u_j - u_{j-1}) u_j'| \right) \leq h \left(\sum_{j=0}^N |u_j'|^2 + \sum_{j=0}^N (1/h)^2 |u_{j+1} - u_j|^2 \right) = 2 |E_h(0)|,$$

de telle sorte que l'on obtient finalement (9) :

$$\int_0^T \left| \frac{u_N(t)}{h} \right|^2 dt \leq 2(T+2) E_h(0).$$

Le θ -schéma. L'intégration par parties discrète en espace donne cette fois-ci avec (10)

$$(N+1)u_N^2 = \sum_{j=0}^N (u_{j+1} - u_j)^2 + \sum_{j=1}^N jh^2 u_j'' (u_{j+1} - u_{j-1}) + \theta \sum_{j=1}^N jh^2 (u_{j+1}'' - 2u_j'' + u_{j-1}'') (u_{j+1} - u_{j-1}),$$

tandis que l'intégration par parties en temps donne

$$\int_0^T (u_{j+1}'' - 2u_j'' + u_{j-1}'') (u_{j+1} - u_{j-1}) dt = - \int_0^T (u_{j+1}' - 2u_j' + u_{j-1}') (u_{j+1}' - u_{j-1}') + (u_{j+1}' - 2u_j' + u_{j-1}') (u_{j+1} - u_{j-1}) \Big|_0^T.$$

Pour étudier le premier terme, on obtient de manière algébrique, en utilisant les égalités $u'_{j+1} - 2u'_j + u'_{j-1} = (u'_{j+1} - u'_j) - (u'_j - u'_{j-1})$ et $u'_{j+1} - u'_{j-1} = (u'_{j+1} - u'_j) + (u'_j - u'_{j-1})$ ainsi que $u_0 = u_{N+1} = u'_0 = u'_{N+1} = 0$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^N j(u'_{j+1} - 2u'_j + u'_{j-1})(u'_{j+1} - u'_{j-1}) = \sum_{j=0}^N j(u'_{j+1} - u'_j)(u'_{j+1} - u'_{j-1}) - \sum_{j=0}^N j(u'_j - u'_{j-1})(u'_{j+1} - u'_{j-1}) \\ &= \sum_{j=0}^N j(u'_{j+1} - u'_j)(u'_{j+1} - u'_j) + \sum_{j=0}^N j(u'_{j+1} - u'_j)(u'_j - u'_{j-1}) - \sum_{j=0}^N j(u'_j - u'_{j-1})(u'_{j+1} - u'_j) - \sum_{j=0}^N j(u'_j - u'_{j-1})(u'_j - u'_{j-1}) \\ &= \sum_{j=0}^N j(u'_{j+1} - u'_j)^2 - \sum_{j=0}^N j(u'_j - u'_{j-1})^2 = \sum_{j=0}^N j(u'_{j+1} - u'_j)^2 - \sum_{j=0}^{N-1} (j+1)(u'_{j+1} - u'_j)^2 = (N+1)|u'_N|^2 - \sum_{j=0}^N (u'_{j+1} - u'_j)^2. \end{aligned}$$

On obtient alors, en posant $Y_h(t) = h \sum_{j=1}^N j(u_{j+1} - u_j - 1)(u'_j + \theta(u'_{j+1} - 2u'_j + u'_{j-1}))$

$$\begin{aligned} \int_0^T \left| \frac{u_N}{h} \right|^2 + \theta |u'_N|^2 dt - Y_h(t)|_0^T &= \int_0^T \sum_{j=0}^N h(\theta - 1/2)(u'_{j+1} - u'_j)^2 + h \left(\frac{u_{j+1} - u_j}{h} \right)^2 + h |u'_j|^2 dt \\ &= 2TE_h^\theta(0) + (2\theta - 1/2)h \int_0^T \sum_{j=0}^N (u'_{j+1} - u'_j)^2 dt \quad (16) \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$Y_h(t) = (1 - 4\theta)W_h(t) + \theta Z_h(t), \quad W_h(t) = h \sum_{j=1}^N j(u_{j+1} - u_j)u'_j, \quad Z_h(t) = h \sum_{j=1}^N j(u_{j+1} - u_j)(u'_{j+1} + 2u'_j + u'_{j-1}),$$

et

$$|W_h(t)| \leq h \sum_{j=1}^N |u'_j|^2 + \left(\frac{u_{j+1} - u_j}{h} \right)^2,$$

$$\begin{aligned} |Z_h(t)| &\leq h \sum_{j=1}^N j (|u_{j+1} - u_j| + |u_j - u_{j-1}|)(|u'_{j+1} + u'_j| + |u'_j + u'_{j-1}|) \\ &\leq h \sum_{j=1}^N 2j^2 |u_{j+1} - u_j|^2 + 2j^2 |u_j - u_{j-1}|^2 + \frac{1}{2} |u'_{j+1} + u'_j|^2 + \frac{1}{2} |u'_j + u'_{j-1}|^2 \leq h \sum_{j=1}^N 4 \left(\frac{u_{j+1} - u_j}{h} \right)^2 + |u'_{j+1} + u'_j|^2, \end{aligned}$$

de telle sorte que

$$|Y_h(t)| \leq h \sum_{j=1}^N \left(\frac{u_{j+1} - u_j}{h} \right)^2 + h \sum_{j=1}^N (1 - 4\theta) |u'_j|^2 + \theta |u'_{j+1} + u'_j|^2 = 2E_h^\theta(0). \quad (17)$$

Pour chaque $0 \leq \theta \leq 1/4$ et $T > 0$, on obtient finalement (14) :

$$\int_0^T \left| \frac{u_N(t)}{h} \right|^2 dt + \theta \int_0^T |u'_N(t)|^2 dt \leq 2(T+2)E_h^\theta.$$

2. L'OBSERVABILITÉ UNIFORME

L'observabilité uniforme a été obtenue pour la méthode des éléments finis mixtes [1], la méthode de filtrage [5] (pour $\theta = 0$ et $\theta = 1/6$) et la méthode à deux grilles [16] (pour $\theta = 0$), [15] (pour $\theta = 0$ et $\theta = 1/6$).

La méthode des éléments finis mixtes. Pour $\theta = 1/4$, qui correspond à la méthode des éléments finis mixtes, à partir de (16), on obtient

$$\int_0^T \left| \frac{u_N}{h} \right|^2 + 1/4 |u'_N|^2 dt = 2TE_h^{1/4}(0) + Y_h(t)|_0^T \geq 2(T-2)E_h^{1/4}(0),$$

ce qui signifie que l'on a observabilité uniforme pour $T > 2$. Notons que l'on ne peut pas se débarrasser du terme $\int_0^T |u'_N(t)|^2 dt$ (on peut le voir en prenant $a_N = 1$ et $a_k = 0$ sinon).

La méthode de filtrage. On a d'après (5) et (11)

$$h^2 |\lambda_k^\theta|^2 = \frac{4 \sin^2(k\pi h/2)}{1 - 4\theta \sin^2(k\pi h/2)} \leq \frac{4 \sin^2(\alpha\pi h/2)}{1 - 4\theta \sin^2(\alpha\pi h/2)}, \quad \text{pour } |k| \leq \alpha N,$$

et donc, pour $0 \leq \theta \leq 1/4$, on a, avec la solution explicite donnée par (5)

$$0 \leq (1/2 - 2\theta)h \int_0^T \sum_{j=0}^N (u'_{j+1} - u'_j)^2 dt = (1/2 - 2\theta) \sum_{|k| \leq \alpha N} |a_k|^2 h^2 |\lambda_k^\theta|^2 |\lambda_k^0|^2 \leq \frac{2(1-4\theta) \sin^2(\alpha\pi h/2)}{1 - 4\theta \sin^2(\alpha\pi h/2)} E_h^\theta(0),$$

de telle sorte que, de (16), on obtient

$$\int_0^T \left| \frac{u_N}{h} \right|^2 + \theta |u'_N|^2 dt \geq (2T-4)E_h^\theta - T \frac{2(1-4\theta) \sin^2(\alpha\pi h/2)}{1 - 4\theta \sin^2(\alpha\pi h/2)} E_h^\theta,$$

ce qui signifie que l'observabilité uniforme est vraie pour

$$T > 2 / \left(1 - \frac{(1-4\theta) \sin^2(\alpha\pi h/2)}{1 - 4\theta \sin^2(\alpha\pi h/2)} \right) = 2(1 - 4\theta \sin^2(\alpha\pi h/2)) / (\cos^2(\alpha\pi h/2)) = 2(1 + (1-4\theta) \tan^2(\alpha\pi h/2)).$$

Notons que l'on obtient le même temps d'observation que dans [5] pour $\theta = 0$ et $\theta = 1/6$ (pour le dernier cas, le temps trouvé était $T > 2/(1 - \gamma/12)$, avec $|\lambda_k^\theta h| \leq \sqrt{\gamma}$, et puisque $\gamma = \frac{4 \sin^2(\alpha\pi h/2)}{1 - 4\theta \sin^2(\alpha\pi h/2)}$, on peut vérifier qu'il s'agit du même temps).

La méthode à deux grilles. En traduisant les relations (15) en série de Fourier, grâce à l'expression (6), on obtient pour $j = 0, \dots, \frac{N-1}{2}$

$$\sum_{k=1}^N (a_k + a_{-k}) \left(e_{2j+1}^k - \frac{e_{2j}^k + e_{2j+2}^k}{2} \right) = 0,$$

ce qui donne, en rappelant que $e_j^k = \sin(jk\pi h)$

$$0 = \sum_{k=1}^N (\lambda_k^0)^2 (a_k + a_{-k}) e_{2j+1}^k = \sum_{k=1}^{(N-1)/2} (\lambda_k^0)^2 (a_k + a_{-k}) e_{2j+1}^k + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} (\lambda_{N+1-k}^0)^2 (a_{N+1-k} + a_{k-N-1}) e_{2j+1}^{N+1-k}$$

On obtient alors par indépendance des $(e_{2j+1}^k)_{k=1}^{(N-1)/2}$ et en procédant de même pour la deuxième relation de (6) pour $k = 0, \dots, \frac{N-1}{2}$:

$$\begin{cases} (\lambda_k^0)^2 (a_k + a_{-k}) = -(\lambda_{N+1-k}^0)^2 (a_{N+1-k} + a_{k-N-1}), \\ (\lambda_k^0)^2 \lambda_k^\theta (a_k - a_{-k}) = -(\lambda_{N+1-k}^0)^2 \lambda_{N+1-k}^\theta (a_{N+1-k} - a_{k-N-1}). \end{cases} \quad (18)$$

En prenant le carré des relations et en sommant, puisque $\lambda_k^\theta \leq \lambda_{N+1-k}^\theta$ pour $k = 1, \dots, (N-1)/2$, on obtient

$$|a_{N+1-k}|^2 + |a_{-N-1+k}|^2 \leq (\nu_k)^4 \left(|a_k|^2 + |a_{-k}|^2 \right), \quad \nu_k = \frac{\lambda_k^0}{\lambda_{N+1-k}^0}, \quad k = 1, \dots, \frac{N-1}{2}. \quad (19)$$

On a déjà les estimations (16) et (17) dérivées de l'inégalité directe. On pose maintenant $C_\theta := \frac{1-4\theta}{1-2\theta}$, qui satisfait pour $k = 1, \dots, (N-1)/2$

$$(1/2 - 2\theta) |\lambda_{N+1-k}^\theta|^2 h^2 \geq C_\theta.$$

Donc, grâce au choix des conditions initiales, on obtient

$$(2\theta - 1/2) h \sum_{j=0}^N |u'_{j+1} - u'_j|^2 - C_\theta E_h^\theta = \sum_{|k|=1}^N \left((2\theta - 1/2) \frac{h^2}{2} |\lambda_k^0|^2 |\lambda_k^\theta|^2 - C_\theta/2 |\lambda_k^0|^2 \right) |a_k|^2 \leq \sum_{k=1}^{(N-1)/2} d_{|k|} |\lambda_k^0|^2 / 2 |a_k|^2,$$

où, pour $k = 1, \dots, (N-1)/2$ et $0 \leq \theta \leq 1/4$ on a

$$\begin{aligned} d_k &:= \left((1/2 - 2\theta) |\lambda_k^\theta|^2 h^2 - C_\theta \right) + \left| (1/2 - 2\theta) |\lambda_{N+1-k}^\theta|^2 h^2 - C_\theta \right| \cdot |\nu_k|^2 \\ &= C_\theta \left((1/2 - \theta) (|\lambda_k^\theta|^2 h^2 + |\lambda_{N+1-k}^\theta|^2 h^2 |\nu_k|^2) - 1 - |\nu_k|^2 \right) = C_\theta \left(|\lambda_{N+1-k}^0|^2 h^2 (1 - \theta h^2 |\lambda_{N+1-k}^0|^2) (1 - \theta h^2 |\lambda_k^0|^2) \right)^{-1} e_k, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} e_k &:= \left((1/2 - \theta) (|\lambda_k^0| |\lambda_{N+1-k}^0|^2 h^4 (2 - 4\theta) + |\nu_k|^2) - 4 (1 - \theta h^2 |\lambda_{N+1-k}^0|^2) (1 - \theta h^2 |\lambda_k^0|^2) \right) \\ &= -4 + 16\theta + |\lambda_k^0|^2 |\lambda_{N+1-k}^0|^2 h^4 \left((-\theta + 1/2) (2 - 4\theta) - 4\theta^2 \right) = (-1 + 4\theta) (4 - |\lambda_k^0|^2 |\lambda_{N+1-k}^0|^2 h^4) \leq 0. \end{aligned}$$

On obtient finalement

$$\int_0^T \left| \frac{u_N}{h} \right|^2 + \theta |u'_N|^2 dt \geq ((2 - C_\theta)T - 4) E_h^\theta(0) = (T/(1 - 2\theta) - 4) E_h^\theta(0),$$

ce qui signifie que l'observabilité uniforme a lieu pour $T > 4(1 - 2\theta)$. Remarquons que l'on obtient le temps $T > 4$, pour $\theta = 0$, comme dans [16] et [15]. Pour $\theta = 1/6$, on obtient l'estimation $T > 2 + 2/3$, qui est meilleure que $T > 4$ obtenue dans [15]. On peut aussi remarquer que l'on obtient le même temps que le temps obtenu par la méthode de filtrage de paramètre $\alpha = 1/2$.

3. UNE INÉGALITÉ DÉPENDANT DE LA POSITION DE L'INTERVALLE

On cherche maintenant des exemples où la position de l'intervalle joue un rôle dans le temps optimal d'observation.

Soit $\alpha > 0$. Alors on a $T \geq \frac{\pi}{\alpha}$ si et seulement si

$$C(T) \sum_{k \geq 1} |a_k|^2 \leq \int_0^T \left| \sum_{k \geq 1} a_k (e^{ik\alpha t} + e^{-ik\alpha t}) \right|^2 dt$$

est vérifié pour tout (a_k) .

D'autre part, on a $T \geq \frac{2\pi}{\alpha}$ si et seulement si

$$C(T) \sum_{k \geq 1} |a_k|^2 \leq \int_{-T/2}^{T/2} \left| \sum_{k \geq 1} a_k (e^{ik\alpha t} + e^{-ik\alpha t}) \right|^2 dt$$

est vérifié pour tout (a_k) .

On voit donc sur cet exemple que le temps optimal pour avoir l'inégalité

$$C(I) \sum_{k \geq 1} |a_k|^2 \leq \int_I \left| \sum_{k \geq 1} a_k (e^{ik\alpha t} + e^{-ik\alpha t}) \right|^2 dt \quad (20)$$

dépend non seulement de la longueur de l'intervalle I mais aussi de sa position. Cet exemple a été mentionné dans [7].

On s'intéresse ici à savoir quand l'inégalité suivante est vérifiée :

$$C(I) \sum_{k \geq 1} |a_k|^2 \leq \int_I \left| \sum_{k \geq 1} a_k e^{ik\alpha t} \right|^2 dt + \int_I \left| \sum_{k \geq 1} a_k e^{-ik\alpha t} \right|^2 dt, \quad (21)$$

où a, b sont des nombres strictement positifs.

Notons que si on a

$$C(I) \sum_{k \geq 1} |a_k|^2 \leq \int_I \left| \sum_{k \geq 1} a_k (e^{ik\alpha t} + e^{-ik\alpha t}) \right|^2 dt, \quad (22)$$

alors (21) est vérifiée. L'inégalité (22) est une généralisation de (20), mais semble plus complexe à obtenir que (21), et c'est pour cela que l'on cherchera ici seulement à étudier sous quelle condition sur I l'inégalité (21) est vérifiée. Notons que par un changement de variable (22) revient à regarder la propriété de suite de Riesz sur l'union des 2 intervalles $aI \cup -bI$. On pourra consulter [10] sur le problème de trouver une base de Riesz sur une union d'intervalles et plus récemment [11] dans le cas multidimensionnel. On établit ici le théorème suivant :

Théorème 3.1. Soit $a, b > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $I = [\alpha T, \alpha T + T]$. On définit T_α par

- Si $\alpha = \ell + s$, avec $\ell \in \mathbb{N}$ et $0 < s < 1$, alors $T_\alpha = \min\left(\frac{2\pi}{\max(a,b)}, \frac{2\pi(\ell+2)}{(a+b)(\ell+1+s)}\right)$.
- Si $\alpha = -\ell + s$, avec $\ell \in \mathbb{N}$, $\ell \geq 2$ et $0 < s < 1$, alors $T_\alpha = \min\left(\frac{2\pi}{\max(a,b)}, \frac{2\pi\ell}{(a+b)(\ell-s)}\right)$.
- Si $\alpha = -1 + s$, avec $0 < s < 1$, alors $T_\alpha = \min\left(\frac{2\pi}{\max(a,b)}, \frac{2\pi}{(a+b)\max(1-s,s)}\right)$.
- Si $\alpha \in \mathbb{Z}$ alors $T_\alpha = \min\left(\frac{2\pi}{\max(a,b)}, \frac{2\pi}{a+b}\right) = \frac{2\pi}{a+b}$.

Alors, pour tout $T \geq T_\alpha$, (21) est satisfaite, avec une constante $C(I)$ indépendante des coefficients (a_k) . Si $T < T_\alpha$, alors (21) ne peut pas être satisfaite avec une constante $C(I)$ indépendante des coefficients (a_k) .

Démonstration. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $I = [\alpha T, \alpha T + T]$. On peut supposer que $aT < 2\pi$ et $bT < 2\pi$. En effet, si $T \geq 2\pi/a$ ou $T \geq 2\pi/b$, (21) sera vérifiée. On a

$$\begin{aligned} \int_I \left(\left| \sum_{k \geq 1} a_k e^{ik\alpha t} \right|^2 + \left| \sum_{k \geq 1} a_k e^{-ik\alpha t} \right|^2 \right) dt &= \left(a \int_{\alpha a T}^{\alpha a T + a T} + b \int_{-\alpha b T - b T}^{-\alpha b T} \right) \left| \sum_{k \geq 1} a_k e^{ikt} \right|^2 dt \\ &= \left(a \int_0^{a T} + b \int_{-\alpha(a+b)T - b T}^{-\alpha(a+b)T} \right) \left| \sum_{k \geq 1} a_k e^{ikt} \right|^2 dt. \end{aligned} \quad (23)$$

On cherche ensuite $k \in \mathbb{Z}$ de telle sorte que

$$-\alpha(a+b)T - bT + 2\pi k \leq aT, \quad -\alpha(a+b)T + 2\pi k \geq 2\pi.$$

Si un tel k existe, on aura

$$\begin{aligned} \left(a \int_0^{aT} + b \int_{-\alpha(a+b)T-bT}^{-\alpha(a+b)T} \right) \left| \sum_{k \geq 1} a_k e^{ikt} \right|^2 dt &= \left(a \int_0^{aT} + b \int_{-\alpha(a+b)T-bT+2\pi k}^{-\alpha(a+b)T+2\pi k} \right) \left| \sum_{k \geq 1} a_k e^{ikt} \right|^2 dt \\ &\geq \left(a \int_0^{aT} + b \int_{aT}^{2\pi} \right) \left| \sum_{k \geq 1} a_k e^{ikt} \right|^2 dt \geq \min(a, b) \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k \geq 1} a_k e^{ikt} \right|^2 dt \end{aligned}$$

et on sera donc assuré d'avoir (21). On obtient donc

$$T(a+b)(\alpha+1) \geq 2k\pi, \quad \alpha T(a+b) \leq 2(k-1)\pi.$$

On distingue donc plusieurs cas.

- On suppose que $\alpha = \ell + s$, avec $\ell \in \mathbb{N}$ et $0 < s < 1$. On obtient alors

$$\frac{k}{\alpha+1} \leq \frac{T(a+b)}{2\pi} \leq \frac{k-1}{\alpha},$$

et donc $\alpha \leq k-1$, ce qui implique que $k-1 > \ell$, donc $k \geq \ell+2$. Comme on doit avoir $T(a+b)(\alpha+1) \geq 2k\pi$, le temps le plus petit que l'on puisse obtenir est alors obtenu pour $k = \ell+2$. Dans ce cas, on a $T(a+b) = 2\pi(\ell+2)/(\ell+1+s)$, et pour cette valeur de $T = T_\alpha$, on a donc (21). Si maintenant $T = T_\alpha - \varepsilon$, avec $\varepsilon > 0$ on aura

$$-\alpha(a+b)T - bT + 2\pi(\ell+1) - aT = (\alpha+1)\varepsilon > 0, \quad -\alpha(a+b)T + 2(\ell+1)\pi \geq 2\pi.$$

D'autre part, on a $aT < 2\pi$, donc on peut choisir ε assez petit de telle sorte que $aT < -\alpha(a+b)T - bT + 2\pi(\ell+1) < 2\pi$. Dans ce cas, on doit avoir $bT \geq 2\pi$, ce qui n'est pas possible.

- On suppose maintenant que $\alpha = -\ell + s$, avec $\ell \in \mathbb{N}$, $\ell \geq 2$ et $0 < s < 1$. On obtient alors

$$\frac{k-1}{\alpha} \leq \frac{T(a+b)}{2\pi} \leq \frac{k}{\alpha+1},$$

et donc $\alpha \geq k-1$, ce qui implique que $k-1 \leq -\ell$. Comme on doit avoir $T(a+b)/(2\pi) \geq (k-1)/\alpha$, le temps le plus petit est obtenu pour $k-1 = -\ell$. On a alors $T = T_\alpha$ et (21). Enfin, si $T = T_\alpha - \varepsilon$, avec $\varepsilon > 0$, assez petit de telle sorte que l'on ait :

$$aT < -\alpha(a+b)T + 2(-\ell+1)\pi = 2\pi + \alpha(a+b)\varepsilon < 2\pi.$$

On doit alors avoir à nouveau $bT \geq 2\pi$, ce qui est impossible.

- On suppose maintenant que $\alpha = -1 + s$, avec $0 < s < 1$. On obtient alors

$$\frac{T(a+b)}{2\pi} \geq \max\left(\frac{k}{\alpha+1}, \frac{k-1}{\alpha}\right).$$

Le minimum de la quantité de droite est obtenu pour $k=0$ ou $k=1$, de telle sorte que l'on obtient (21) pour $T = T_\alpha$. Enfin, si $T = T_\alpha - \varepsilon$, comme $k/(\alpha+1)$ et $2(k-1)/\alpha$ sont distincts pour $k=0, 1$ et $\alpha \notin \{0, 1\}$, on se retrouve dans l'un des cas des deux cas précédents et donc on ne peut pas avoir (21).

- On suppose que $\alpha \in \mathbb{Z}$. On a alors pour $T = T_\alpha$, en prenant le membre de droite de (23), $a \int_0^{\frac{2\pi a}{a+b}} + b \int_{\frac{-2\pi b}{a+b}}^0$, et donc on a un intervalle de longueur 2π , ce qui signifie que (21) est valide. Enfin, si $T < T_\alpha$, on a $aT + bT < 2\pi$ et donc (21) ne peut pas être satisfaite. \square

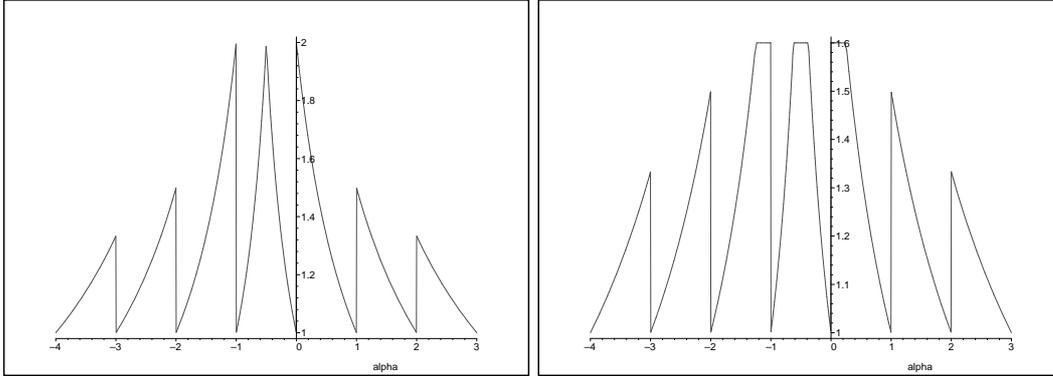


FIGURE 1. $T_\alpha \frac{(a+b)}{2\pi}$ versus α , pour $a = b = 1$ (à gauche) et pour $a = 1$ et $b = 0.6$ (à droite).

A titre d'exemple, on a représenté sur le Figure 1 le temps T_α en fonction de α pour différentes valeurs de a et b . On déduit du Théorème 3.1 le corollaire suivant :

Corollaire 3.2. *Soit $I = [\varepsilon, \varepsilon + T]$, avec $0 < \varepsilon < T$. Alors, si (8) a lieu pour toutes les conditions initiales satisfaisant (15), on a $T \geq 2\sqrt{2} - \varepsilon$.*

Démonstration. Supposons que l'on ait montré que

$$\int_\varepsilon^{T+\varepsilon} \left| \sum_k a_k e^{i\pi/\sqrt{2}kt} \right|^2 dt + \int_\varepsilon^{T+\varepsilon} \left| \sum_k a_k e^{-i\pi/\sqrt{2}kt} \right|^2 dt \geq C(I) \sum_k |a_k|^2, \quad (24)$$

Ceci implique donc que $T \geq T_\alpha$, avec $\alpha = \frac{\varepsilon}{T}$. Comme $0 < \varepsilon < T$, on a $0 < \alpha < 1$ et donc $\frac{a+b}{2\pi} T_\alpha = \frac{2}{1+\alpha}$, avec $a = b = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$, ce qui implique que $T \geq 2\sqrt{2} - \varepsilon$, ce qui donne le résultat.

Il reste maintenant à montrer (24). Pour cela, on reprend la démonstration de [7] établie pour l'intervalle $[-T/2, T/2]$. On suppose donc que l'on a l'observabilité uniforme (8) pour $I = [\varepsilon, T + \varepsilon]$ pour des données initiales satisfaisant (15). On considère alors une sous classe de solutions satisfaisant

$$a_k = a_{-k}, \quad N^- := N/2 - N^{1/4} \leq k \leq N/2, \quad a_k = 0 \quad |k| < N^-.$$

On a alors en posant $\nu_k = \frac{\lambda_k^0}{\lambda_{N+1-k}^0}$

$$\int_I \left| \frac{u_N(t)}{h} \right|^2 dt \leq 2 \int_I \left| \sum_{k \geq N^-} \frac{e_k^k}{h} (a_k e^{i\lambda_k t} + a_k \nu_k^2 e^{i\lambda_{N+1-k} t}) \right|^2 + \left| \sum_{k \geq N^-} \frac{e_k^k}{h} (a_k e^{-i\lambda_k t} + a_k \nu_k^2 e^{-i\lambda_{N+1-k} t}) \right|^2 dt,$$

et donc

$$C(T) \sum_{k=N^-}^{N/2} |\lambda_k|^2 |a_k|^2 \leq \int_I \left| \sum_{k \geq N^-} \frac{e_k^k}{h} a_k e^{i\lambda_k t} \right|^2 dt + \int_I \left| \sum_{k \geq N^-} \nu_k^2 \frac{e_k^k}{h} a_k e^{i\lambda_{N+1-k} t} \right|^2 dt,$$

ce qui donne (en utilisant le fait que $\left| \frac{e_k^k}{\lambda_k h} \right| \geq \cos(\pi/4)$, dès que $N/2 - \sqrt{N} - 1 \leq k \leq N/2$),

$$C(T) \sum_{k=N^-}^{N/2} |a_k|^2 \leq \int_I \left| \sum_{k \geq N^-} a_k e^{i\lambda_k t} \right|^2 dt + \int_I \left| \sum_{k \geq N^-} \nu_k^2 a_k e^{i\lambda_{N+1-k} t} \right|^2 dt.$$

En décomposant $\lambda_k^0 = 2/h \sin(\pi/4 + (k-1/(2h))\pi h/2)$ et $\lambda_{N+1-k}^0 = 2/h \cos(\pi/4 + (k-1/(2h))\pi h/2)$, on obtient

$$\int_{\varepsilon}^{T+\varepsilon} \left| \sum_k a_k e^{i\pi/\sqrt{2}kt} \right|^2 dt + \int_{\varepsilon}^{T+\varepsilon} \left| \sum_k \nu_k^2 a_k e^{-i\pi/\sqrt{2}kt} \right|^2 dt \geq C(T) \sum_k |a_k|^2.$$

Maintenant, en prenant une borne supérieure de $|\nu_k^2 - 1|$ qui tend vers zéro, l'inégalité se réduit à (24). \square

Remarque 3.3. On ne sait pas si le résultat reste valable pour $\varepsilon = 0$. On sait que si $T \geq 2\sqrt{2}$, alors (8) a lieu pour toutes les conditions initiales satisfaisant (15), indépendamment de la position de l'intervalle, cf [7]. Notons qu'en prenant $\varepsilon = 0$ dans (24), on obtient seulement $T \geq 2$, et le problème de connaître le temps optimal pour avoir (8) pour toutes les conditions initiales satisfaisant (15), dans le cas de l'intervalle $[0, T]$ reste ouvert.

RÉFÉRENCES

- [1] C. Castro and S. Micu, *Boundary controllability of a linear semi-discrete 1D wave equation derived from a mixed finite element method*, Numer. Math. 102 (3) (2006), 413–462.
- [2] R. Glowinski, *Ensuring well posedness by analogy : Stokes problem and boundary control of the wave equation*, J. Comput. Physics, 103(2) (1992), 189–221.
- [3] R. Glowinski, C. H. Li and J. L. Lions, *A numerical approach to the exact boundary controllability of the wave equation (I), Dirichlet Controls : Description of the numerical methods* Japan. J. Appl. Math., 7 (1990), 1–76.
- [4] L. Ignat, *Propiedades cualitativas de esquemas numéricos de aproximación de ecuaciones de difusión y de dispersión*, Thesis, Universidad Autónoma de Madrid (2006).
- [5] J. A. Infante and E. Zuazua, *Boundary observability for the space discretization of the 1D wave equation*, M²AN, 33(2) (1999), 407–438.
- [6] A. E. Ingham, *Some trigonometrical inequalities with applications in the theory of series*, Math. Z. 41 (1936), 367–379.
- [7] P. Loreti and M. Mehrenberger, *An Ingham type proof for a bigrid observability theorem*, ESAIM COCV 14 (3), (2008), 604–631.
- [8] V. Komornik, *Exact Controllability and Stabilization-The Multiplier Method*, John Wiley and Masson, Chicester and Paris, 1994.
- [9] V. Komornik and P. Loreti, *Fourier Series in Control Theory*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2005.
- [10] Y. I. Lyubarskii, K. Seip, *Sampling and Intepolating Sequences for Multiband-Limited Functions end Exponential Bases on Disconnected Sets*, J. Fourier Anal. Appl., 3, 5, 597-615, 1997.
- [11] J. Marzo, *Riesz basis of exponentials for a union of cubes in \mathbb{R}^d* , <http://arxiv.org/aabs/math.FA/0601288>, 2005.
- [12] S. Micu, *Uniform boundary controllability of a semi-discrete 1D wave equation*, Numer. Math. 91 (2002), 723–766.
- [13] A. Münch, *Family of implicit and controllable schemes for the 1D wave equation*, C. R. Acad. Sci. Paris Série I, 339(10) (2004), 733–738.
- [14] A. Münch, *A uniformly controllable and implicit scheme for the 1D wave equation*, Mathematical Modelling and numerical analysis 39(2) (2005), 1–42.
- [15] M. Negreanu, *Numerical methods for the analysis of the propagation, observation and control of waves*, Thesis, Universidad Complutense Madrid (2003). Available at <http://www.uam.es/proyectosinv/cen/indocumentos.html>
- [16] M. Negreanu and E. Zuazua, *Convergence of a multigrid method for the controllability of a 1D wave equation*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, 338 (5), (2004), 413–418.
- [17] K. Ramdani, T. Takahashi and M. Tucsnak, *Uniformly exponentially stable approximations for a class of second order evolution equations. Application to LQR optimization problems*, ESAIM COCV, 13 (3), (2007), 503–527.
- [18] E. Zuazua, *Propagation, Observation, Control and Numerical Approximation of Waves approximated by finite difference methods*, SIAM Review, 47 (2) (2005), 197-243.