

Abstract

L'OPÉRATEUR de gyromoyenne est défini par

$$J(f)(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + \rho \cos(\theta), y + \rho \sin(\theta)) d\theta.$$

Dans un champ magnétique uniforme, les particules décrivent une trajectoire hélicoïdale et la projection sur le plan perpendiculaire est un cercle. L'opérateur de gyromoyenne traduit alors, dans la théorie gyrocinétique, l'idée de moyenner la fonction de distribution des particules autour d'un cercle d'un rayon caractéristique (le rayon de Larmor ρ) représentant le mouvement de gyration très rapide des particules autour des lignes de champs. On s'intéresse ici à la résolution numérique de cet opérateur en présentant et comparant différentes méthodes numériques.

On suppose f 2π périodique en x et en y . On définit une grille cartésienne de taille $N_x \times N_y$.

1. Décomposition dans une base

On écrit

$$f(x, y) = \sum_{j,k} \eta_{j,k} B_{j,k}(x, y),$$

Le calcul de la gyromoyenne se réduit au calcul de la gyromoyenne sur les éléments de base

$$\mathcal{J}(f)(x, y) = \sum_{j,k} \eta_{j,k} \mathcal{J}(B_{j,k})(x, y).$$

2. Expression en Fourier

En prenant la base de Fourier

$$B_{j,k}(x, y) = \exp(ijx) \exp(iky),$$

on obtient

$$\mathcal{J}(B_{j,k}) = \mathcal{J}(B_{j,k})(0, 0) B_{j,k} = J_0(\sqrt{j^2 + k^2} \rho) B_{j,k},$$

où J_0 est la fonction de Bessel.

Sur la grille cartésienne, on obtient la méthode de Bessel, qui est exacte sur la grille pour les fonctions $B_{j,k}$. Il s'agit de la méthode de référence.

3. Approximation de Padé et autres variantes

On considère l'approximation

$$J_0(\sqrt{j^2 + k^2} \rho) \simeq \left(1 + \frac{\rho^2(j^2 + k^2)}{4}\right)^{-1},$$

qui se traduit par

$$\left(1 - \frac{\rho^2}{4} \Delta\right) \mathcal{J}(f) = f.$$

Sur la grille cartésienne, on obtient la méthode de Padé, notée PADE1. On définit de manière similaire PADE2 par

$$J_0(\sqrt{j^2 + k^2} \rho) \simeq \left(1 + \frac{\rho^2(j^2 + k^2)}{4} + \frac{\rho^4(j^2 + k^2)^2}{64}\right)^{-1},$$

TAYLOR1

$$J_0(\sqrt{j^2 + k^2} \rho) \simeq 1 - \frac{\rho^2(j^2 + k^2)}{4},$$

et TAYLOR2

$$J_0(\sqrt{j^2 + k^2} \rho) \simeq 1 - \frac{\rho^2(j^2 + k^2)}{4} + \frac{\rho^4(j^2 + k^2)^2}{64}.$$

4. Approximation linéaire et par splines cubiques

On prend les fonctions de base linéaire (LIN) ou splines cubiques (SPL) sur la grille cartésienne. Pour la quadrature des fonctions de bases, on discrétise $[0, 2\pi[$ de manière uniforme, pour obtenir les méthodes

LIN4, LIN8, LIN16, SPL4, SPL8, SPL16

ou de manière adaptative suivant le rayon (3 points de Gauss utilisés sur chaque arc d'intersection avec le maillage), pour obtenir les méthodes

IM-LIN, IM-SPL

5. Comparaison des méthodes

CONNAISSANT f sur la grille, chacune des méthodes permet de calculer $\mathcal{J}(f)$ sur la grille:

$$(f_{j,k}) \in \mathbb{R}^{N_x \times N_y} \rightarrow (\mathcal{J}(f)_{j,k}) \in \mathbb{R}^{N_x \times N_y}$$

En notant $\hat{f}_{j,k}$ la transformation de Fourier discrète de $f_{j,k}$, pour la méthode de Bessel, on a

$$\frac{\widehat{\mathcal{J}(f)}_{j,k}}{\hat{f}_{j,k}} = J_0(\rho \sqrt{j^2 + k^2}). \quad (1)$$

Les autres méthodes fournissent alors par le membre de gauche de (1) une approximation de la fonction de Bessel. Plus précisément, pour chaque méthode, on peut écrire

$$\mathcal{J}(f)_{r,s} = \sum_{j,k} a_{j,k} f_{j+r,k+s}.$$

Le terme $a_{j,k}$ correspond à la contribution du point d'indice (j, k) de la gyromoyenne au point $(0, 0)$. On obtient alors

$$\widehat{\mathcal{J}(f)}_{j,k} = \tilde{a}_{j,k} \hat{f}_{j,k}.$$

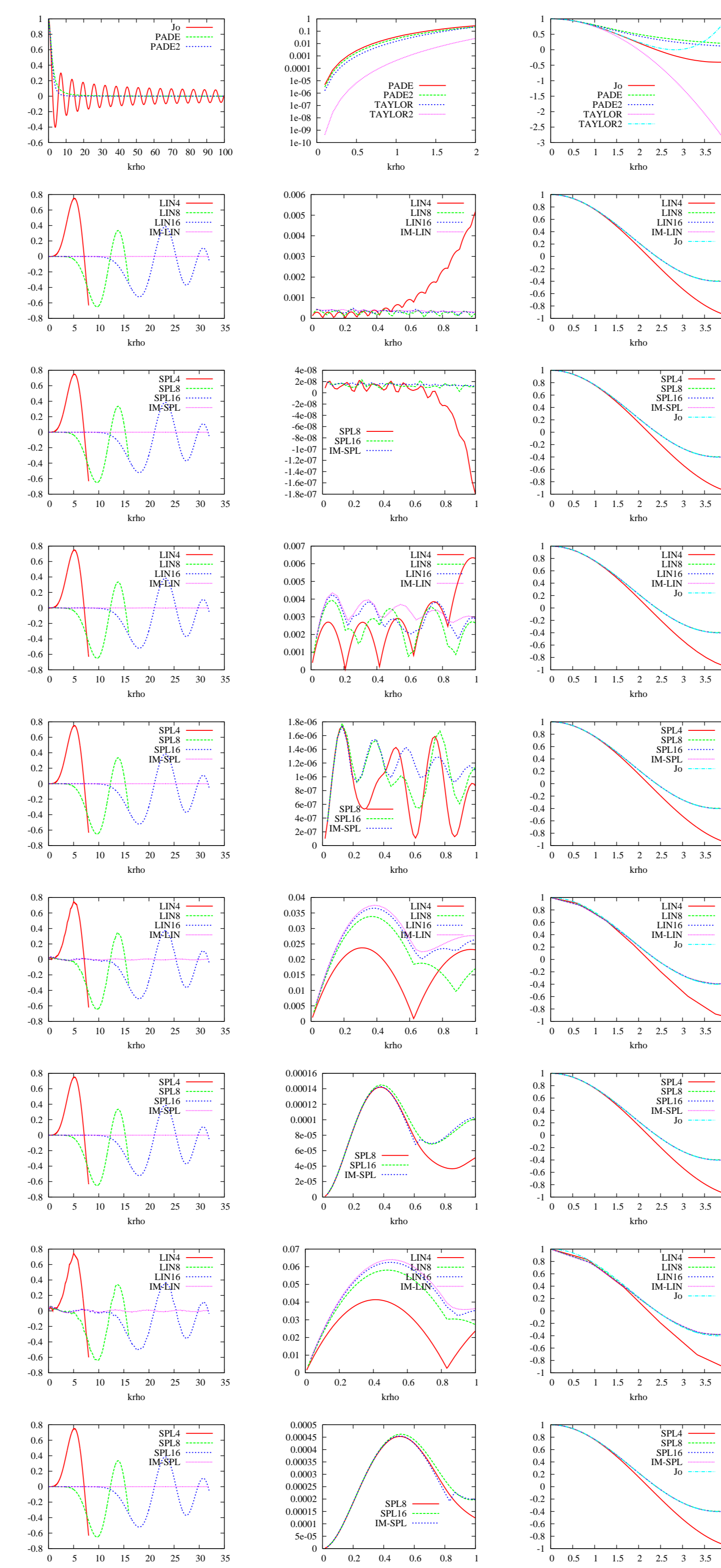


Figure 1: Approximation de la fonction de Bessel et erreur pour différentes méthodes $N_x = N_y = 128$, $(j, k) = (1, 1), (3, 3), (9, 9), (12, 12)$.

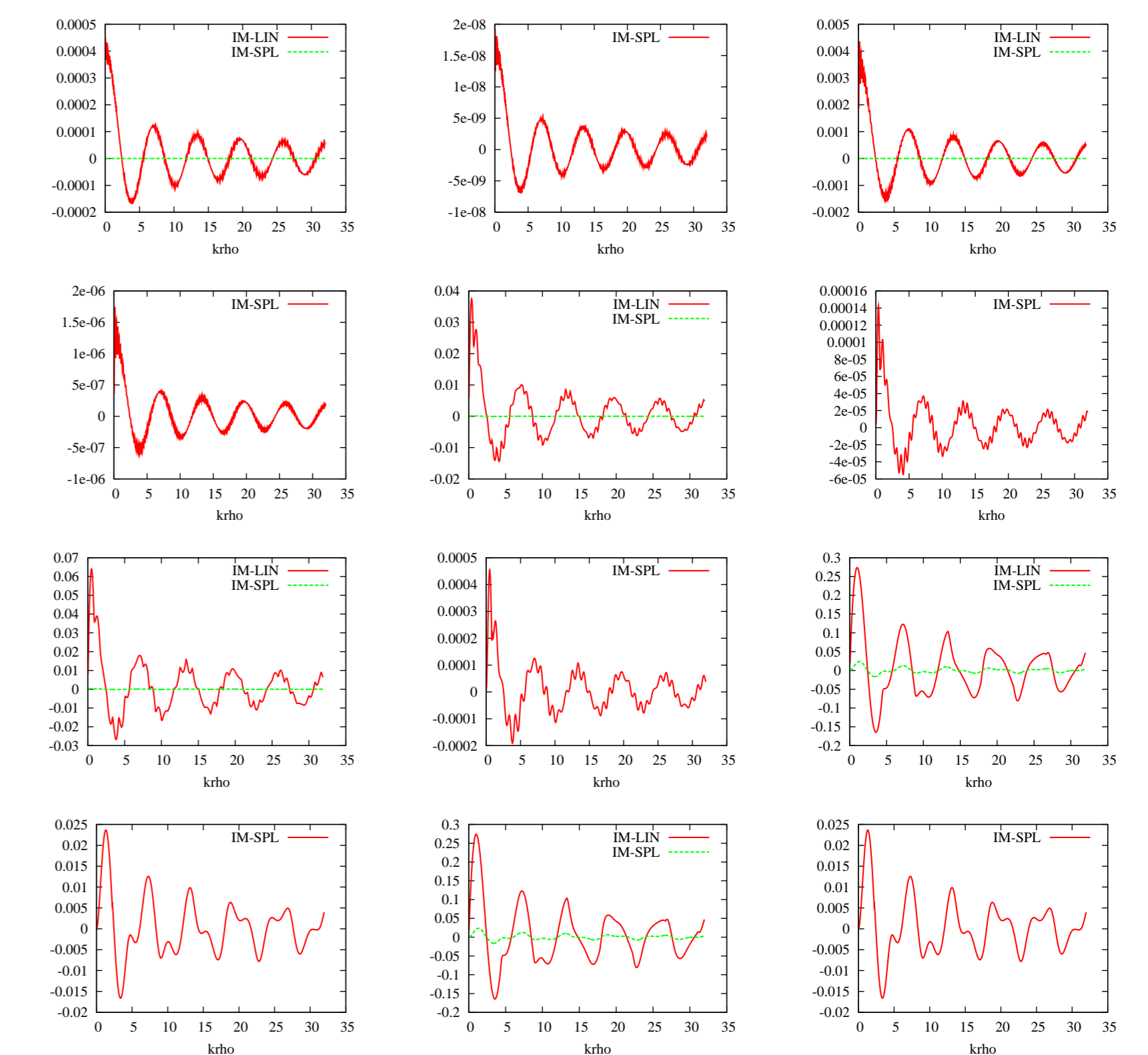


Figure 2: Erreur avec la fonction de Bessel pour IM-LIN et IM-SPL $N_x = N_y = 128$, $(j, k) = (1, 1), (3, 3), (9, 9), (12, 12), (32, 32), (64, 64)$.

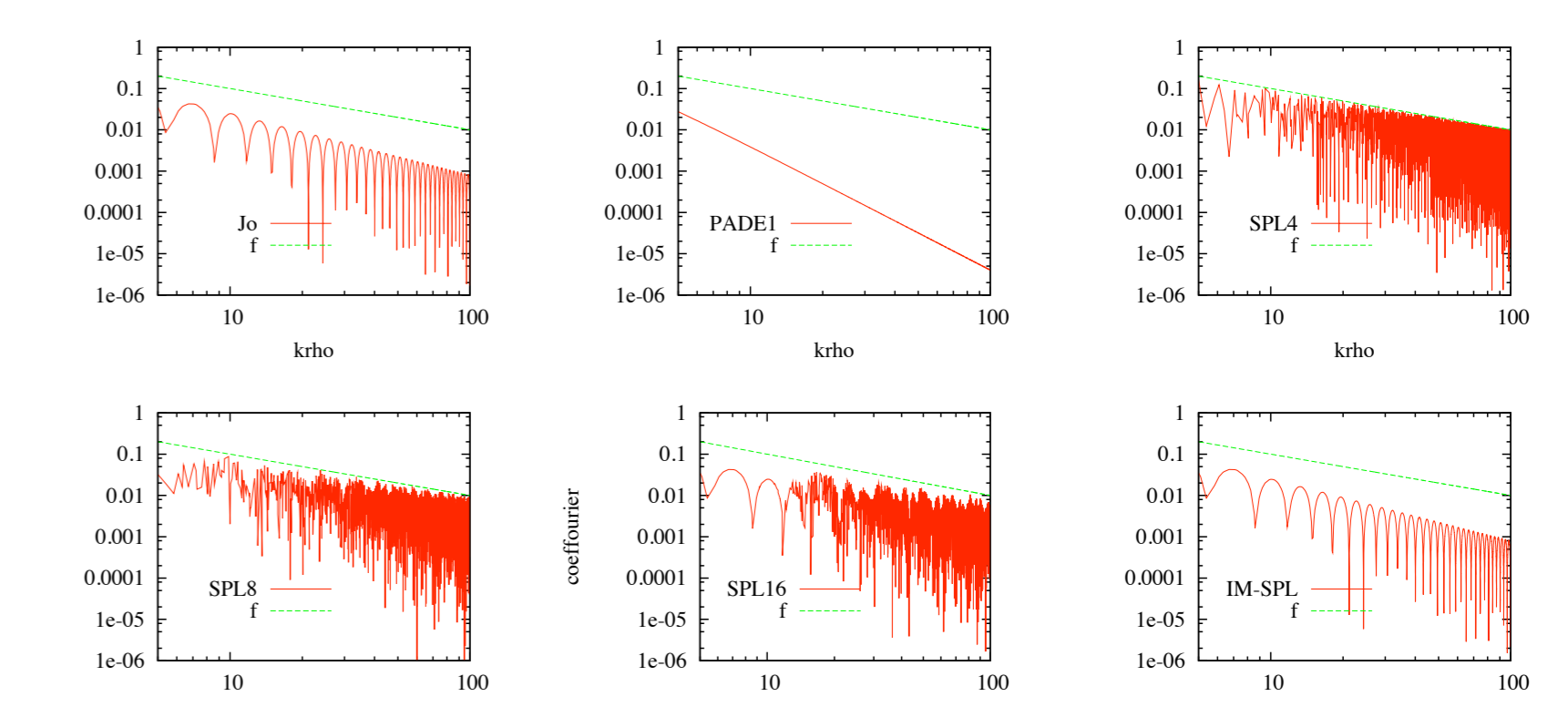


Figure 3: Comparaison de la gyromoyenne et de la fonction dans l'espace de Fourier pour différentes méthodes $\rho = 1$.

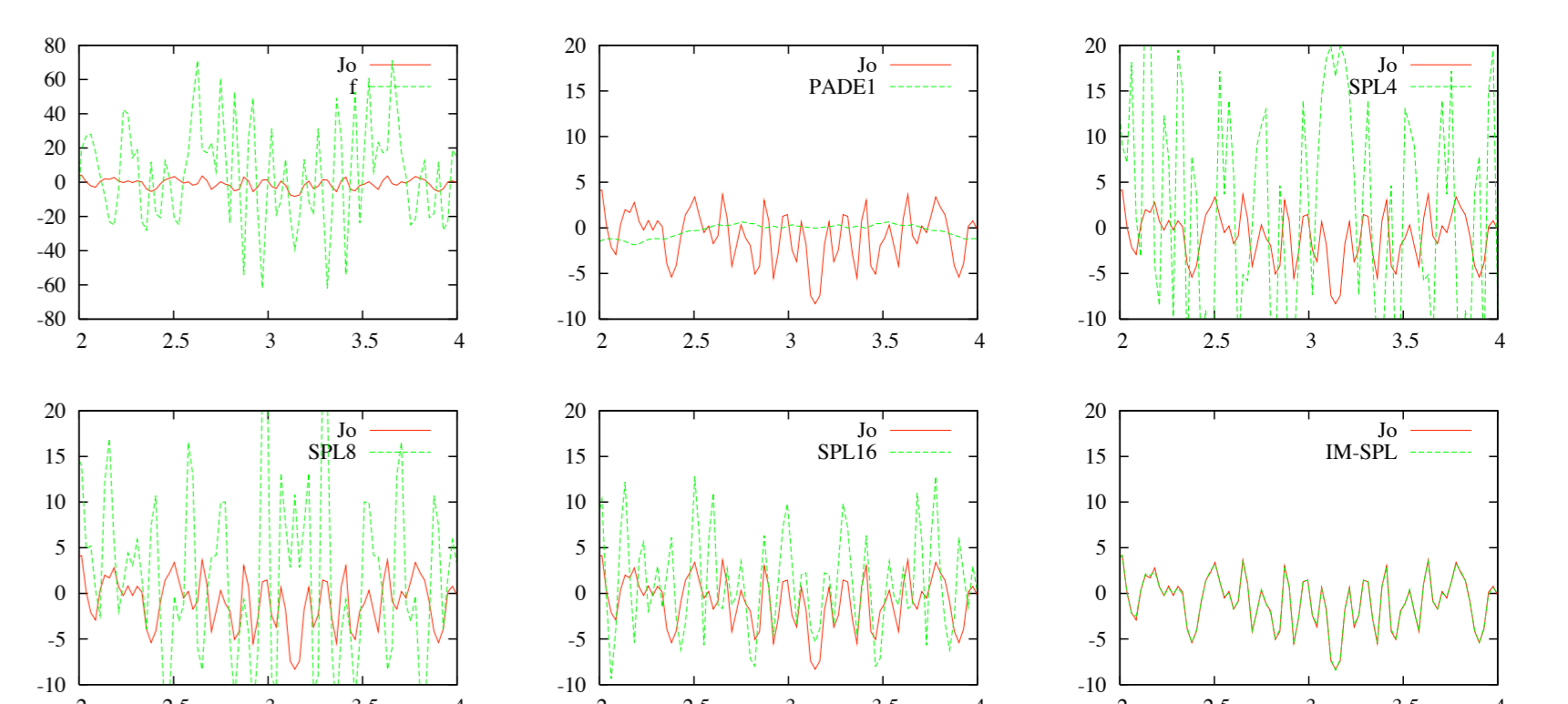


Figure 4: Gyromoyenne en fonction de x , pour $y = \pi/2$. Comparaison de différentes méthodes. $\rho = 0.5$.

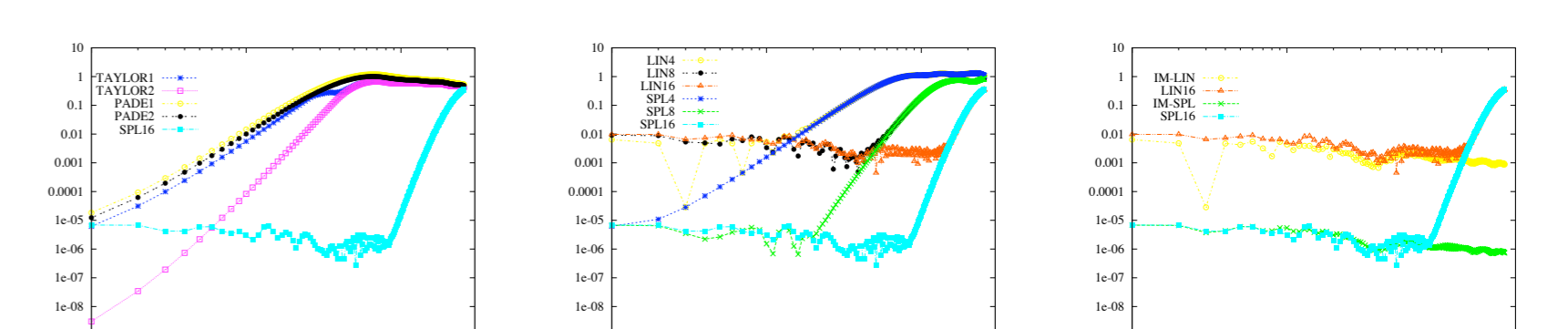


Figure 5: Erreur L^1 (par rapport à la méthode de Bessel) en fonction de ρ (échelle log).

6. Conclusion

PRÉSENTATION d'un cadre général englobant la méthode de Bessel et les méthodes de quadrature. Comparaison entre les méthodes dans le cas périodique (espace réel et de Fourier).

References

- [1] N. Crouseilles, M. Mehrenberger, H. Sellama, *Numerical solution of the gyroaverage operator for the finite gyroradius guiding-center model*, Commun. Comput. Phys., Vol. 8, No. 3, pp. 484-510, September 2010.
- [2] Z. Lin, W. W. Lee, *Method for solving the gyrokinetic Poisson equation in general geometry*, Phys. Rev. E, Vol. 52, No. 5, pp. 5646-5652, November 1995.