

Inégalités d'Ingham et schémas semi-lagrangiens pour l'équation de Vlasov

M. Mehrenberger

Université de Strasbourg, IRMA; INRIA Grand Est, Projet CALVI; ANR GYPSI

Soutenance HDR, 5 octobre 2012

Au menu

- Inégalités d'Ingham (3/41 → 8/41)
- L'équation de Vlasov (9/41 → 14/41)
- Schémas semi-lagrangiens (15/41 → 39/41)

Remerciements

- Merci à Vilmos Komornik, Eric Sonnendrücker
- Merci à mes rapporteurs
- Merci à tous ceux avec qui j'ai pu travailler, à EDP, IRMA, CALVI
- Merci particulier à Nicolas Crouseilles

Le théorème d'Ingham (1936)

Soit $\gamma > 0$ et $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaisant la condition d'écart

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n > \gamma,$$

alors pour $T > \frac{2\pi}{\gamma}$, on a

$$c \sum_k |a_k|^2 \leq \int_0^T \left| \sum_k a_k e^{i\lambda_k t} \right|^2 dt \leq C \sum_k |a_k|^2,$$

où les constantes $c, C > 0$ sont indépendantes de la suite (a_k) .

Remarques et motivations

- Généralisation de l'égalité de Parseval
- Diverses généralisations possibles
 - coefficients vectoriels
 - cadre multi-dimensionnel
 - contraintes sur les coefficients...
- Outil pour montrer l'observabilité
 - Nécessité d'avoir des informations spectrales précises sur la solution sous forme de série de Fourier
 - Souvent appliqué dans le cas $1D$
 - En complément d'autres techniques : multiplicateurs, inégalités de Carleman, analyse micro-locale...
- une référence : Komornik, Loreti *Fourier Series in Control Theory*

Travail de recherche sur les inégalités d'Ingham

- Résultat théorique d'optimalité
 - optimalité du temps dans le cadre vectoriel avec différences divisées
- Application à l'observabilité pour certaines géométries
 - équation des ondes dans un carré (puis produit d'intervalles)
- Discrétisation
 - méthode à deux grilles pour l'observabilité frontière de l'équation des ondes en dimension un

Observabilité de l'équation des ondes pour un carré

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, des réels $L_i > 0$, $i = 1, \dots, N$, $\Omega = \prod_{i=1}^N]0, L_i[$ et $u(t, x)$ solution de

$$\begin{cases} u'' = \Delta u, & 0 < t < T, & x \in \Omega \\ u = 0, & 0 < t < T, & x \in \partial\Omega \\ u(0, x) = u_0(x), & u'(0, x) = u_1(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (1)$$

Proposition

Soit $\Gamma = \cup_{j=1}^N \left(\prod_{i=1}^{j-1} [0, L_i] \times \{0\} \times \prod_{i=j+1}^N [0, L_i] \right)$. Il existe $T_0 > 0$ tel que pour $T > T_0$, le système (1) soit observable : il existe une constante $c > 0$ telle que l'on ait

$$\|u_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|u_1\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c \int_0^T \int_{\Gamma} |\partial_\nu u(t, x)|^2 d\Gamma dt, \quad (2)$$

pour tout $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Remarques

- Temps optimal par la méthode des multiplicateurs (classique)
- Temps non optimal obtenu ici par l'approche Ingham
- Principe de la preuve (en suivant Loreti, Valente, 1997)
 - Ecart pour les forts coefficients
 - Evacuation des termes sans écart uniforme
 - grâce à la positivité de la fonction d'Ingham
 - Termes mixtes absorbés par les termes avec écart
- Même type de preuve pour la méthode à deux grilles ($N = 1$) avec temps $T > 4L$
 - ⇒ méthode raffinée pour avoir un temps $T > 2\sqrt{2}L$
- Adaptations pour de nouveaux résultats
 - contraintes sur les données initiales
 - spectre essentiel (Khodja, Mauffrey, Münch, 2011)

Travaux en cours/Perspectives

- Etude d'autres géométries
- Etude de réseaux
- Développements numériques
- Contrôle et stabilisation

L'équation de Vlasov

$f(t, x, v)$ solution de l'équation de Vlasov

$f(t, x, v)dx dv$ représente la probabilité de trouver des particules dans un élément de volume $dx dv$ au temps t au point (x, v) (position, vitesse)

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + F(t, x) \cdot \nabla_v f = 0$$

- Equation de transport
- Non linéarité à travers le champ F qui dépend de f (Poisson, Maxwell)
- Description de la dynamique de particules chargées dans un plasma

Vlasov-Poisson (1D \times 1D)

Le système de Vlasov-Poisson

$$\partial_t f(t, x, v) + v \partial_x f(t, x, v) - E(t, x) \partial_v f(t, x, v) = 0,$$

où le champ E est solution de l'équation de Poisson

$$\partial_x E(t, x) = 1 - \int_{\mathbb{R}} f(t, x, v) dv$$

avec condition de moyenne nulle ($\int_0^L E(t, x) dx = 0$)

\Rightarrow Modèle simplifié ; premiers cas tests plasma

\Rightarrow Solution régulière, mais développement de petites échelles

Le modèle centre guide (1D \times 1D)

Le modèle centre guide

$$\partial_t f(t, x, y) + \partial_x (E_y(t, x, y) f(t, x, y)) + \partial_y (-E_x(t, x, y) f(t, x, y)) = 0,$$

où le champ $E = (E_x, E_y) = -\nabla\Phi$ est solution de l'équation de Poisson

$$-\Delta\Phi = f(t, x, y)$$

Le modèle GYSELA 5D

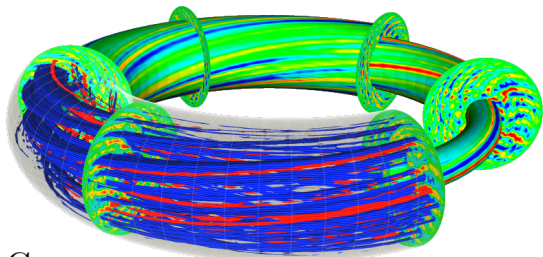
1. Les variables

$$f = f(t, r, \theta, \phi, v_{//}, \mu)$$

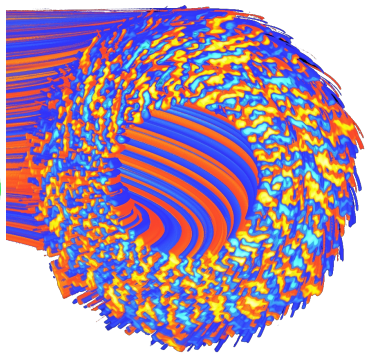
2. Equation de transport en $r, \theta, \phi, v_{//}$, boucle sur μ
3. Equation quasi neutre, similaire à l'équation de Poisson 3D
4. Opérateur de gyromoyenne : moyenne sur un cercle de rayon dépendant de μ

Le contexte GYSELA

Le code GYSELA (GYrokinetic SEmi LAgrangian), CEA Cadarache



GYSELA



(Courtesy V. Grandgirard)

Maillage $5D$ de $272 \cdot 10^9$ points. 31 jours sur 8192 processeurs

Le contexte SeLaLib

SEmi LAgrangian LIbrary

Objectif

Bibliothèque modulaire pour la simulation gyrocinétique par une méthode semi-Lagrangienne

Support

- action d'envergure nationale INRIA
- Projet ANR GYPSI (2010-2014)
- Projet INRIA CALVI
- Collaboration avec le CEA Cadarache

Principe d'une méthode semi-lagrangienne

- Calcul de courbes caractéristiques, le long desquelles la fonction de distribution est constante
- Etape d'interpolation

Méthodes numériques pour Vlasov

- Methodes PIC
 - bruit numérique
 - caractéristiques
 - pas de discrétisation de l'espace des phases
- Méthodes eulériennes
 - discrétisation de l'espace des phases
 - condition CFL
- Méthodes semi-lagrangiennes
 - compromis PIC/eulérien
 - pas de condition CFL
 - discrétisation de l'espace des phases

Travail de recherche

- Discrétisation en temps (18/41 → 23/41)
 - Ordre élevé en temps pour Vlasov-Poisson
- Discrétisation en espace : le transport linéaire (24/41 → 30/41)
 - Diverses reconstructions
 - Cadre unifié et comparaisons
 - Estimations de convergence
 - Application à Vlasov-Poisson
- Le cas non constant (modèle centre-guide) (31/41 → 39/41)
 - Adaptation des méthodes
 - Compatibilité avec le calcul du champ

Travail de recherche 1/3

- Discrétisation en temps
 - Ordre élevé en temps pour Vlasov-Poisson

Le splitting de Strang

Transport en x pendant $\Delta t/2$

$$\partial_t f(t, x, v) + v \partial_x f(t, x, v) = 0$$

Mise à jour de E à travers l'équation de Poisson

Transport en v pendant Δt

$$\partial_t f(t, x, v) + E(t, x) \partial_v f(t, x, v) = 0$$

Transport en x pendant $\Delta t/2$

$$\partial_t f(t, x, v) + v \partial_x f(t, x, v) = 0$$

A propos des discrétisations en temps

- Splitting de Strang souvent utilisé (depuis Cheng-Knorr [1976]), erreur en $O(\Delta t^2)$
- Splitting d'ordre plus élevé possible (Yoshida[1990], Blanes et al [2000,2008], Schaeffer [2009], Watanabe-Sugama [2004])

étapes de splitting : a_0, \dots, a_{2s}

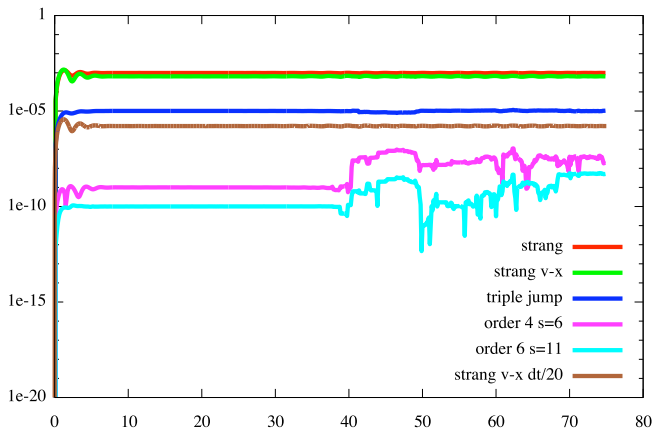
splitting de Strang : $s = 1$, $a_0 = 1/2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1/2$

- Une alternative : Integral Deferred Corrections (Qiu-Christlieb-Morton[2011])

Bénéfice de discrétisations d'ordre élevé

Landau non linéaire

Energy conservation



Conditions d'ordre

Théorème

Pour le système de Vlasov-Poisson, avec pas de splitting a_0, \dots, a_{2s} , on trouve les mêmes conditions d'ordre que les conditions de Runge-Kutta-Nyström (RKN) dérivées pour les EDO jusqu'à l'ordre 4

lien avec une structure de Poisson

$$\{\{T, U\}_f, U\}_f = 2U,$$

qui implique une relation de type RKN

$$\{\{\{T, U\}_f, U\}_f, U\}_f = 0,$$

valables pour les systèmes différentiels de second ordre de la forme

$$y''(x) = (g_A + g_B)(y(x)), \quad g_A, g_B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

⇒ espoir d'avoir un choix plus large de coefficients pour un ordre ≥ 5 .

Quelques remarques

- Calculs longs mais élémentaires
 - DL des caractéristiques en arrière à chaque étape
 - DL du champ électrique
 - DL des caractéristiques en avant à la fin
- Nombre arbitraire de coefficients
- Automatiquement des coefficients négatifs pour le degré ≥ 3
- Nombre minimum d'étapes n'est pas toujours le mieux
- Problème de représentation des diagnostics en temps, pour des pas de temps trop grands (!)
- Pas de bon ordre pour les champs électriques intermédiaires \Rightarrow procédure CK possible (cf Rossmanith, Seal, 2011)

Travail de recherche 2/3

- Discrétisation en espace : le transport linéaire
 - Diverses reconstructions
 - Cadre unifié et comparaisons
 - Estimations de convergence
 - Application à Vlasov-Poisson

Historique non exhaustif de méthodes SL pour VP

- splines cubiques (Cheng-Knorr, 1976)
 - bon compromis entre coût et précision
- Fourier-Hermite (Schumer, Holloway, 1998)
- interpolation d'Hermite (Nakamura, Yabe, 1999)
- méthode PFC : positive et conservative (Filbet et al., 2001)
- maillages non structurés (Besse, Sonnendrücker, 2003)
- méthodes adaptatives/ondelettes/maillage mobile (Besse, Campos Pinto, Ghizzo, Gutnic, Haefele, Hoenen, Latu, Oudet, Paun, Salmon, Sonnendrücker, Torri, Violard...)
- splines locales (Crouseilles, Latu, Sonnendrücker, 2009)
- en avant (Crouseilles, Respaud, Sonnendrücker, 2009)
- WENO (Carillo, Vecil, 2007 ; Qiu, Christlieb, Shu, 2011)
- Galerkin Discontinu (Mangeney et al., 2002 ; Qiu, Shu ; Rossmanith, Seal, 2011 ; Ayuso et al., 2012)

L'advection linéaire

$$\partial_t f(t, x) + a \partial_x f(t, x) = 0, \quad f(t, x) = f(0, x - at)$$

- Brique de base dans le cadre d'un splitting pour Vlasov Poisson
- Maillage uniforme

$$x_j = x_0 + j\Delta x, \quad \Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{N}$$

- Degrés de liberté en espace à mettre à jour
 - Valeurs ponctuelles (forme advective)

$$f(t, x_j)$$

- Valeurs moyennes (forme conservative)

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} f(t, x) dx$$

- Variante vectorielle : $x_{j,0}, \dots, x_{j,d}$ points de Gauss sur $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$

Equivalence discrète forme advective/conservative

- Mise à jour des degrés de liberté par une reconstruction
 - Mise à jour des valeurs ponctuelles par reconstruction advective
 - Mise à jour des valeurs moyennes par reconstruction conservative
- Advectif \rightarrow conservatif :
Reconstruction conservative à partir de la reconstruction advective sur la primitive de moyenne nulle
- Conservatif \rightarrow advectif :
Utilisation de la reconstruction conservative sur les valeurs ponctuelles
- Hypothèses pour l'équivalence
 - cadre du transport linéaire périodique sur maillage uniforme
 - linéarité de l'opérateur de reconstruction
 - préservation des constantes

Reconstructions de Lagrange LAG-2d+1

Le pied de la caractéristique

$$x_j - a\Delta t$$

tombe dans la cellule

$$[x_{j^*}, x_{(j+1)^*}]$$

On interpole en utilisant les $2d + 2$ points

$$x_{j^*-d}, \dots, x_{j^*+d+1}$$

- Pour $d = 0$, schéma upwind (sous $CFL \leq 1$) très diffusif
- $d = 1$, PFC sans limiteurs, similaire aux interpolettes
- ordre impair : diffusion l'emporte sur la dispersion (faible CFL)
 - correspond à un décentrage en volume fini
- Ne pas hésiter à prendre d assez grand ($d = 4$, $d = 8$)
 - baisse de la diffusion et reste peu dispersif
 - implémentation fft \rightarrow faible coût

Formulation Hermite

On reconstruit les dérivées à gauche et à droite

- différences finies centrées compactes
 - degré 2 PPM0
 - degré 4 PPM1 (Colella et al., 1984)
 - degré 6 PPM2 (Colella et al., 2008)
- splines cubiques (raccord C^2)
 - méthode de référence dès Cheng-Knorr, 1976
 - aussi méthode PSM (Zerroukat et al., 2006)
 - proches de PPM2
 - reste une formule centrée (dispersion pour faible CFL)
- différences finies décentrées
 - degré 3, on retrouve LAG-3
 - degré $2d + 1 > 3$, similaire à LAG- $2d+1$ pour petite CFL

Formulation unifiée ; extension type splines locales envisageable

Estimation de convergence

Théorème

Pour Vlasov Poisson, avec splitting de Strang et une reconstruction LAG- $2d+1$, on a l'estimation de convergence

$$\|f^n - f(t_n)\|_2 \leq C \left(\min \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, 1 \right) \Delta x^{2d+1} + \Delta t^2 \right).$$

Minimisation de l'erreur ($d \geq 1$) pour $\Delta t \simeq \Delta x^{(2d+1)/2}$ et donc $\min \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, 1 \right) = 1$

\Rightarrow déplacement plus petit qu'une cellule, pour un schéma semi-lagrangien !

Résultat précédent : $\frac{\Delta x^{2d+2}}{\Delta t} + \Delta t^2$

Travail de recherche 3/3

- Le cas non constant (modèle centre-guide)
 - Adaptation des méthodes
 - Compatibilité avec le calcul du champ

Problématique

- Forme conservative de l'équation

$$\partial_t f + \partial_x(a_1 f) + \partial_y(a_2 f) = 0$$

- forme advective de l'équation

$$\partial_t f + a_1 \partial_x f + a_2 \partial_y f = 0$$

- équivalence pour champ à divergence nulle

$$\partial_x a_1 + \partial_y a_2 = 0$$

- Plus d'équivalence pour les parties splittées

- splitting conservatif : perte de la conservation des états constants
- splitting advectif : perte de la conservation de la masse

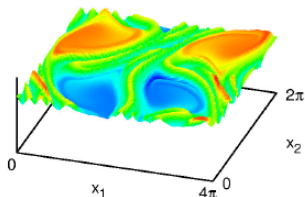
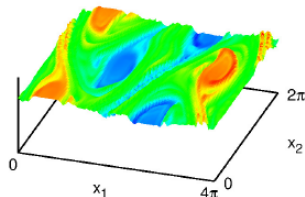
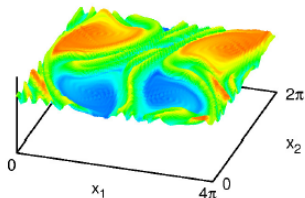
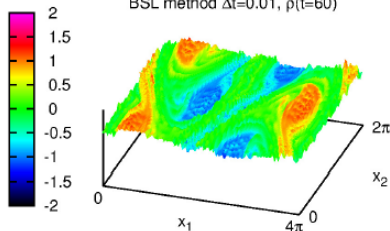
Méthodes numériques

- Méthodes sans splitting :
 - BSL (référence) : splines cubiques sur forme advective (Sonnendrücker et al., 1999)
 - ne conserve pas toujours la masse
 - meilleure conservation avec champ compatible
 - FSL : méthode en avant ; conserve la masse (Bergot, Campos Pinto, Crouseilles, Latu, Respaud, Sonnendrücker...)
- Méthodes avec splitting conservatif (CSL) :
 - Utilisation de la forme conservative (PFC, PPM2, PSM)
 - Condition pour conserver les états constants à l'ordre 1 (Braeunig et al. 2009)
 - Possibilité d'ajouter des limiteurs (aussi pour l'advection linéaire)
 - Cas particulier de Galerkin Discontinu

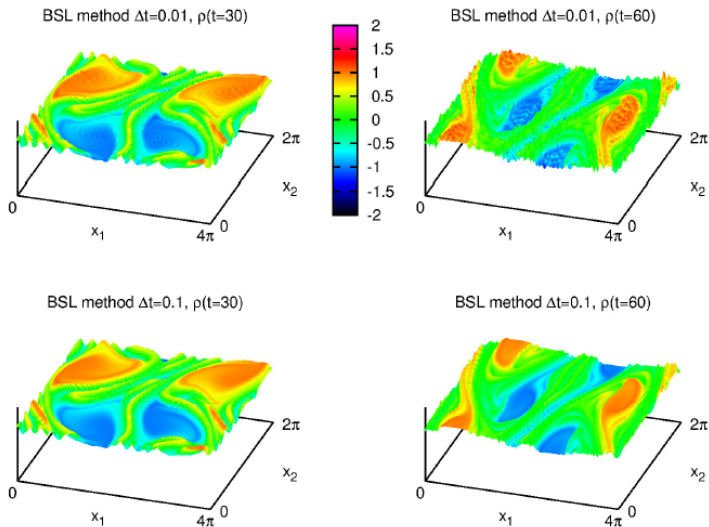
Galerkin discontinu

- Formulation faible
- Calcul des pieds des caractéristiques aux points de Gauss
- Interpolation linéaire par morceaux pour les autres pieds
- Evaluation exacte de l'intégrale avec ces pieds approchés

$$\begin{aligned}
 g_{j,\ell}^{n+1} &= \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} g(t_{n+1}, \mathbf{x}) \varphi_{j,\ell}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
 &= \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} g(t_n, \mathbf{X}(t_n; t_{n+1}, \mathbf{x})) \varphi_{j,\ell}(\mathbf{x}) \partial_{\mathbf{x}} \mathbf{X}(t_n, t_{n+1}, \mathbf{x}) d\mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

Méthode GD (N_x, N_y, d) = (32, 32, 3) $\Delta t = 0.01$ DG method, $\rho(t=30)$ DG method, $\rho(t=60)$ BSL method $\Delta t=0.01$, $\rho(t=30)$ BSL method $\Delta t=0.01$, $\rho(t=60)$ 

Résultats numériques BSL (N_x, N_y) = (128, 128)



Résultats numériques GD

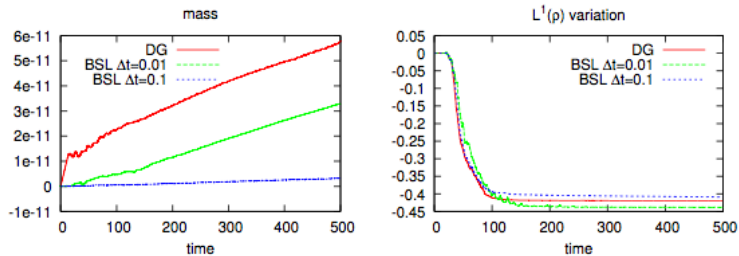


FIGURE: **Modèle centre-guide.** à gauche : évolution en temps de la masse totale ; à droite : évolution en temps de la variation de $\|\rho(t)\|_{L^1}$.

Résultats numériques GD

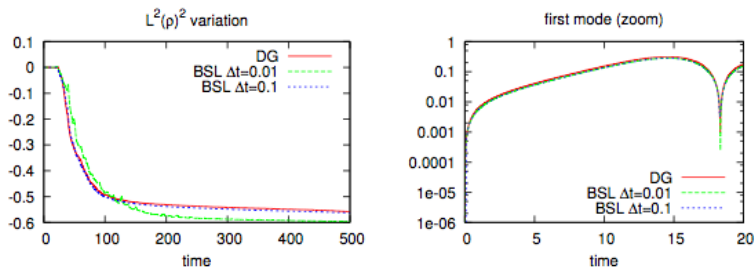


FIGURE: Modèle centre-guide. à gauche : évolution en temps de la variation de $\|\rho(t)\|_{L^2}$ (enstrophie) ; à droite : évolution en temps du premier mode de Fourier $\|\phi_{k=0.5}(t)\|_{L^2}$

Résultats numériques GD

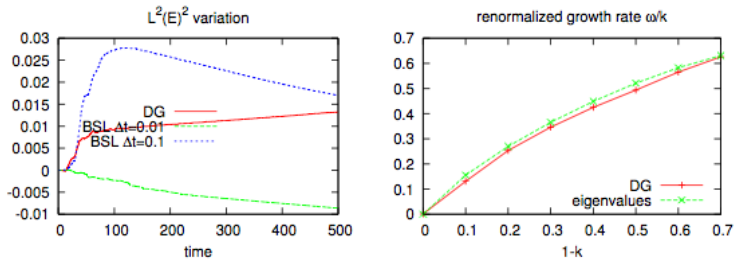


FIGURE: Modèle centre-guide. à gauche : évolution en temps de la variation de $\|E(t)\|_{L^2}$; à droite : taux de croissance ω/k en fonction de $k - 1$.

Co-Encadrement

- Opérateur de gyromoyenne : thèse de C. Steiner, 09/2011-.
- Méthodes conservatives multi-dimensionnelles : thèse de P. Glanc, 10/2010-.
- Méthodes semi-Lagrangiennes en avant (FSL) et sur maillage curviligne, maillage adapté aux invariants, postdoc M. Bergot, H. Sellama, 2011-2012
- Equations équivalentes pour le transport, stage M2, C. Steiner, 2011.
- Développements de méthodes semi-Lagrangiennes en géométrie polaire, stage M1, E. Madaule, 2012.

Autres axes de recherche

- Convergence en temps et en espace pour Vlasov-Poisson
- Séparation échelle rapide/lente
- Etude et développement de méthodes semi-lagrangiennes
- Développement logiciel (SELALIB)