Formules min-max pour les vitesses d'ondes progressives multidimensionnelles

François Hamel

CNRS, Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Paris VI,
Tour 55-65, 5ème étage, 4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France ; Fax : + 33 1 44 27 72 00
&
M.I.T., Department of Mathematics,
2-388, 77 Mass. Avenue, Cambridge, MA 02139-4307, USA ; Fax : + 1 617 253 4358

Résumé. Cet article porte sur les solutions du type ondes progressives de certaines équations de réaction-diffusion posées dans des cylindres infinis $\Sigma = \{(x_1, y) \in \mathbb{R} \times \omega\}$ de section ω, domaine régulier de $\mathbb{R}^{n-1}$ $(n \geq 2)$. Ces ondes ont une vitesse c et un profil u qui sont solutions de

$$\Delta u - \beta(y, c)\partial_{x_1} u + f(u) = 0 \text{ dans } \overline{\Sigma}.$$

Pour certains types de non-linéarités f, la vitesse c de ces ondes multidimensionnelles existe et est unique. Nous en donnons une expression variationnelle du type min-max. Pour un autre type de fonction f, il existe une vitesse minimale et nous en donnons une formule min-max. En particulier, ces formules généralisent aux dimensions supérieures certains résultats de Volpert *et al.* [32] pour des ondes planes.

Abstract. This work deals with travelling waves solutions of some reaction-diffusion equations in infinite cylinders $\Sigma = \{(x_1, y) \in \mathbb{R} \times \omega\}$ whose section $\omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ $(n \geq 2)$ is a smooth domain. These waves have a speed c and a profile u which are solutions of

$$\Delta u - \beta(y, c)\partial_{x_1} u + f(u) = 0 \text{ in } \overline{\Sigma}.$$

For some types of nonlinearities f, the speed c exists and is unique. We give a min-max variational formula for this speed c. For another type of function f, there exists a minimal speed, for which we give a min-max formula. In particular, these formulas generalize to the multidimensional case some results of Volpert *et al.* [32] for planar waves.

1 Introduction

L'objectif de cet article est de donner des formules variationnelles pour les vitesses c d'ondes progressives multidimensionnelles u solutions de certaines équations de réaction-diffusion. Plus précisément, on étudie les solutions (c,u) du problème elliptique semi-linéaire suivant posé dans un cylindre infini $\Sigma=\{(x_1,y)\in I\!R\times\omega\}$

$$(P)\qquad \left\{\begin{array}{rl} \Delta u-\beta(y,c)\partial_1 u+f(u)=0 & \text{dans } \overline{\Sigma}\\ \partial_\nu u=0 & \text{sur } \partial\Sigma\\ u(-\infty,\cdot)=0<u<u(+\infty,\cdot)=1 & \text{dans } \overline{\Sigma}\end{array}\right.$$

Les inconnues de ce problème sont d'une part le paramètre réel c, qui est une valeur propre non linéaire et qui représente la vitesse d'une certaine onde, et d'autre part le profil u de cette onde. Nous cherchons à déterminer des formules explicites pour les vitesses c. Ici, ω est un domaine régulier de $I\!R^{n-1}$ et ν désigne la dérivée normale extérieure à $\partial\Sigma$. Les fonctions u sont recherchées de classe C^2 dans $\overline{\Sigma}$.

On note $\partial_1 u$ et $\partial_\nu u$ les dérivées de u par rapport à x_1 et ν. La fonction $\beta(y,c)$ est donnée et continue sur $\overline{\omega}\times I\!R$, lipschitzienne en y, strictement croissante par rapport à c et est telle que $\beta(y,c)\to\pm\infty$ quand $c\to\pm\infty$ uniformément en y dans $\overline{\omega}$ (par exemple, on peut avoir $\beta(y,c)=c+\alpha(y)$, ou $\beta(y,c)=c\alpha(y)$ avec $\alpha>0$ dans $\overline{\omega}$). Enfin, les limites quand $x_1\to\pm\infty$ seront toujours considérées comme uniformes par rapport à $y\in\overline{\omega}$.

D'autre part, le terme non-linéaire f est une fonction donnée, définie sur $[0,1]$, lipschitzienne, et telle que $f(0)=f(1)=0$. Trois cas sont couramment envisagés dans la littérature et nous les examinerons successivement :

Cas A : $\exists\theta\in]0,1[$ tel que $f\equiv 0$ sur $[0,\theta]$ et $f>0$ sur $]\theta,1[$
(cas avec "température d'ignition" θ)

Cas B : $\exists\theta\in]0,1[$ tel que $f<0$ sur $]0,\theta[$, $f(\theta)=0$ et $f>0$ sur $]\theta,1[$
(cas "bistable")

Cas C : $f>0$ sur $]0,1[$ (cas "KPP" ou "ZFK")

Nous supposons de plus quelques hypothèses techniques qui seront prises par défaut tout au long de cet article. Dans chacun des cas A, B et C définis ci-dessus, on suppose que $f'(0)$ et $f'(1)$ existent et que $f'(1)<0$. La valeur 1 est donc toujours un point stable pour le problème d'évolution $\dot{X}=f(X)$. En outre, on suppose qu'il existe $\delta>0$, $M>0$ et $s_0>0$ tels que

$$\left\{\begin{array}{rl} |f(s)-f'(0)s|,\ |f(1-s)+f'(1)s|\le Ms^{1+\delta} & \forall\ 0\le s\le s_0\\ |f(1-s)-f(1-s')+f'(1)(s-s')|\le M(s+s')^\delta|s-s'| & \forall\ 0\le s,s'\le s_0\end{array}\right.$$

En quelques mots, ces types de termes sources f apparaissent notamment dans des modèles de combustion pour les cas A et C (*cf* par exemple Kanel' [21], Williams [33], Zeldovic, Frank-Kamenetskii [36]). Les non-linéarités f du type B ou C interviennent dans des modèles biologiques de dynamiques de populations ou de propagation d'influx nerveux (voir par exemple Aronson, Weinberger [2], Fife [15], Fisher [17], Kolmogorov, Petrosky, Piskunov [23], Stokes [28]). Dans le cadre de la combustion, la fonction u représente le profil de la température normalisée d'un mélange de deux gaz $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ entre lesquels une réaction simple $\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ se produit. Sous certaines hypothèses sur les coefficients de diffusion des espèces, la fonction $1-u$ est alors la concentration relative de $\mathcal{A}$. Le terme source f tient compte des lois d'action de masse et d'Arrhénius; le réel c est alors la vitesse de flamme (très précisément son flux massique). D'une manière générale, c est la vitesse d'un front et l'équation (P) est l'équation d'une certaine quantité u dans le repère se déplaçant à la vitesse c vers la gauche.

En dimension 1 d'espace, le problème (P) se réduit à l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\begin{cases} u'' - cu' + f(u) = 0 \quad \text{dans } I\!R \\ u(-\infty) = 0,\ u(+\infty) = 1 \end{cases}$$

Un grand nombre de travaux ont été consacrés à cette équation en dimension 1. Ces travaux, qui ont été initiés par Kolmogorov, Petrovsky, Piskunov [23], Zeldovic, Frank-Kamenetskii [36] et puis Kanel' [21], fournissent des résultats d'existence et éventuellement d'unicité ou de stabilité des solutions (c, u) de (P) (voir aussi Aronson, Weinberger [2], Bramson [11], Fife, McLeod [16], Freidlin [18], Stokes [28]).

Les résultats sur les ondes planes ont été en grande partie généralisés en dimension supérieure pour le problème (P) posé dans des cylindres infinis $\Sigma = I\!R \times \omega$, dans une série de travaux de Berestycki, Larrouturou, Lions, Nirenberg, Roquejoffre ou Vega ([5], [6], [9], [26], [29]). Par ailleurs, des résultats similaires ont été donnés par Xin avec des conditions au bord de type périodique par rapport à y ([34], [35]). Les principaux résultats qui nous serviront de référence ont été énoncés par Berestycki et Nirenberg dans [9]. Nous les résumons dans le théorème suivant :

Théorème 1.1 ([9]) *1) Si f est du type A ("température d'ignition"), alors il existe un unique couple (c, u) solution du problème (P), la fonction u étant unique à translation près par rapport à x_1. De plus, $\partial_1 u > 0$ dans $\overline{\Sigma}$.*

2) Si f est du type B (cas "bistable"), alors il existe une fonction ψ définie sur $\overline{\omega}$ et une solution (c, u) de

$$(P') \qquad \begin{cases} \Delta u - \beta(y, c)\partial_1 u + f(u) = 0 \quad \text{dans } \overline{\Sigma} = I\!R \times \overline{\omega} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \partial\Sigma \\ u(-\infty, \cdot) = 0 \text{ et } u(+\infty, y) = \psi(y) \end{cases}$$

où la fonction ψ, non spécifiée, est solution de :

$$(S) \qquad \begin{cases} \Delta\psi + f(\psi) = 0 \quad \text{dans } \overline{\omega} \\ \partial_\nu \psi = 0 \quad \text{sur } \partial\omega \end{cases}$$

De plus, ou bien $\psi \equiv 1$, ou bien $0 < \psi < 1$ dans $\overline{\omega}$. Soit $\mu_1(\psi)$ la valeur propre principale de l'opérateur $-\Delta_y - f'(\psi)$ dans ω avec conditions de Neumann homogènes sur $\partial\omega$. Si les deux hypothèses suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} \mu_1(\psi) > 0 \\ (f'(0) < 0) \text{ ou } \left(f'(0) = 0,\ \beta(y, c) = c\alpha(y),\ \alpha > 0 \text{ et } \int_0^1 f > 0\right), \end{cases} \tag{1.1}$$

alors le couple (c, u) solution de (P')-(S) est unique, toujours à translation près pour u, et $\partial_1 u > 0$ dans $\overline{\Sigma}$.

Enfin, si ω est convexe, si f est de classe $C^{1,\delta}([0,1])$ pour un certain $\delta > 0$ et si la deuxième hypothèse de (1.1) est satisfaite, alors il existe une unique solution (c,u) du problème (P).

3) Si f est du type C ("KPP" ou "ZFK"), il existe une vitesse minimale c^* telle que le problème (P) a des solutions (c,u) si et seulement si $c \geq c^*$. De plus si $f'(0) > 0$, alors la solution u correspondant à toute vitesse $c \geq c^*$ est strictement croissante par rapport à x_1 et est unique modulo translation.

Remarquons que dans le cas bistable B, on ne peut pas se passer de l'hypothèse ω convexe pour garantir l'existence de solutions de (P) (avec 0 et 1 comme conditions aux limites en $\pm\infty$). En effet, Berestycki et Hamel ont donné des exemples de domaines ω non convexes pour lesquels (P) n'a pas de solution ([4]). Nous signalons aussi que l'unicité des vitesses n'est plus garantie dans les cas A ou B si la non-linéarité f est du type $f(x_1,u)$ et si f est croissante par rapport à x_1 : il existe alors un intervalle de vitesses solutions (voir Hamel [20] pour le problème (P) et Volpert, Volpert, Volpert [32] pour le cas de systèmes d'équations différentielles ordinaires).

Dans les cas A ou B, avec les hypothèses du théorème 1.1, la vitesse c est unique pour les problèmes (P) ou (P')-(S). Il est donc naturel de chercher une formule explicite pour cette vitesse en fonction des données β et f. Pour les modèles de combustion, la détermination de la vitesse de propagation de flamme est une question fondamentale. Dans les problèmes de propagation d'influx nerveux, la connaissance de cette vitesse est également importante. Pour le cas des ondes planes, citons la formule $c \simeq c_{ZFK} = \sqrt{2\int_0^1 f(s)ds}$ donnée par Zeldovic, Frank-Kamenetskii [36] dans le cas où f est du type A et approche une masse de Dirac en $s = 1$ (limite asymptotique des hautes énergies d'activation). Cette formule asymptotique est également vraie dans le cas d'ondes planes solutions d'un système de deux équations différentielles ordinaires (Berestycki, Nicolaenko, Scheurer [7]) et dans le cas d'ondes multidimensionnelles dans un cylindre infini Σ (Berestycki, Caffarelli, Nirenberg [3]). D'autres formules asymptotiques de ce type ont été utilisées pour calculer des vitesses de flammes planes (voir par exemple le cas des flammes de méthane : Peters, Williams [25]). Par ailleurs, Clavin et Williams [13] ont également donné un développement asymptotique pour la vitesse de propagation de flammes dans un modèle de turbulence à grande échelle.

Dans le cas où f est du type C, la question se pose de trouver une formule pour la vitesse minimale c^*. Pour les ondes planes, si $f(s)/s \leq f'(0)$ pour tout $s \in]0,1]$, Kolmogorov, Petrovsky, Piskunov [23] ont trouvé une formule explicite pour c^* : $c^* = c_{KPP} = 2\sqrt{f'(0)}$ (voir aussi [18], [19], [28]). Dans le cadre de la combustion, Clavin [12] a expliqué la transition entre ces deux vitesses de flammes planes c_{ZFK} et c_{KPP}.

Enfin, dans un cas de combustion solide modélisé par deux équations différentielles ordinaires, l'une du deuxième ordre et l'autre du premier ordre, nous signalons qu'une méthode d'approximations successives a été utilisée pour déterminer la vitesse de propagation de front (Volpert, Volpert [31]).

Etudions maintenant le problème des ondes multidimensionnelles (c,u) solutions de (P). Sans considérer de modèle asymptotique, nous cherchons une formule variationnelle pour l'unique vitesse de propagation c pour toute fonction f du type A ou B, et pour la vitesse minimale c^* dans le cas C. Le résultat principal de cet article est le théorème suivant :

Théorème 1.2 *Pour tout $y \in \overline{\omega}$, notons γ_y la bijection de $I\!R$ dans $I\!R$ telle que $\gamma_y(c) = \beta(y,c)$ pour tout $c \in I\!R$. Soit $p > n$ et soit les ensembles fonctionnels :*

$$E = \{w \in W^{2,p}_{loc}(\overline{\Sigma}),\ \Delta w \in C(\overline{\Sigma}),\ 0 < w < 1,\ \partial_1 w > 0 \text{ dans } \overline{\Sigma},\ \partial_\nu w = 0 \text{ sur } \partial\Sigma\},$$
$$E_A = E_C = E_{AC} = \{w \in E,\ w(-\infty,\cdot) = 0 \text{ et } w(+\infty,\cdot) = 1\},$$
$$E_B = \{w \in E,\ w(-\infty,\cdot) = 0 \text{ et } w(+\infty,\cdot) = \psi(y)\}.$$

On a alors :
1) dans le cas où f est du type A ("température d'ignition"),

$$c = \min_{w \in E_{AC}} \ \sup_{(x_1,y)\in\overline{\Sigma}} \ \gamma_y^{-1}\left(\frac{\Delta w + f(w)}{\partial_1 w}\right) \tag{1.2}$$

$$c = \max_{w \in E_{AC}} \ \inf_{(x_1,y)\in\overline{\Sigma}} \ \gamma_y^{-1}\left(\frac{\Delta w + f(w)}{\partial_1 w}\right) \tag{1.3}$$

2) dans le cas où f est du type B ("bistable"), et avec les hypothèses (1.1),

$$c = \min_{w \in E_{B}} \ \sup_{(x_1,y)\in\overline{\Sigma}} \ \gamma_y^{-1}\left(\frac{\Delta w + f(w)}{\partial_1 w}\right) \tag{1.4}$$

$$c = \max_{w \in E_{B}} \ \inf_{(x_1,y)\in\overline{\Sigma}} \ \gamma_y^{-1}\left(\frac{\Delta w + f(w)}{\partial_1 w}\right) \tag{1.5}$$

3) dans le cas où f est du type C ("KPP" ou "ZFK"), et si $f'(0) > 0$,

$$c^* = \min_{w \in E_{AC}} \ \sup_{(x_1,y)\in\overline{\Sigma}} \ \gamma_y^{-1}\left(\frac{\Delta w + f(w)}{\partial_1 w}\right) \tag{1.6}$$

De plus, dans les cas A et B, les min et les max sont atteints par l'unique solution u. Dans le cas C, le min est atteint par l'unique solution u^* correspondant à la vitesse minimale c^*.

Pour une non-linéarité f du type bistable B et de classe $C^{1,\delta}([0,1])$, si l'ouvert ω est convexe et si la deuxième hypothèse de (1.1) est satisfaite, alors il existe une unique solution (c,u) de (P) d'après le théorème 1.1. Avec ces hypothèses, on en déduit donc que les formules (1.2) et (1.3) sont vraies comme dans le cas A avec température d'ignition.

Les formules min-max (1.2)-(1.6) impliquent en particulier que la vitesse c (cas A ou B) et la vitesse minimale c^* (cas C) sont croissantes à la fois par rapport à β et par rapport à f. Cela généralise au cas multidimensionnel de résultats connus pour les ondes planes (Kan-On [22]).

Les formules min-max (1.2)-(1.6) permettent également de trouver aisément des bornes pour les vitesses de propagation d'ondes, en calculant les fonctionnelles $\gamma_y^{-1}\left(\frac{\Delta w+f(w)}{\partial_1 w}\right)$ sur des fonctions tests w appartenant aux espaces E_{AC} ou E_B.

Remarques. 1. En dimension 1 d'espace, des formules du type min-max semblables à (1.2)-(1.6) existent pour les vitesses d'ondes progressives (planes) solutions de systèmes différentiels avec des non-linéarités du type bistable ou "KPP" (cas B ou C) (voir Kan-On [22], Mischaikow, Huston [24], Volpert, Volpert, Volpert [32]). En fait, le théorème 1.2 généralise donc au cas multidimensionnel certains des résultats de [22], [24], [32], avec des termes sources qui peuvent être de l'un quelconque des trois types A, B ou C.

Dans les articles précités, certaines des démonstrations des formules pour les vitesses d'ondes planes reposent notamment sur des méthodes de tir et sur une étude dans le plan de phase. Ces techniques ne peuvent s'étendre au cas multidimensionnel à cause de la dépendance en la coordonnée transversale y. Par ailleurs, la démonstration des formules d'ondes planes du Théorème 7.1 de [32] est basée sur un résultat de stabilité des ondes progressives et des espaces fonctionnels à poids exponentiels sont requis, notamment si l'on doit considérer des non-linéarités du type "température d'ignition". Dans les formules (1.2)-(1.6), nous supprimons ces restrictions dans la mesure où les fonctions tests w doivent seulement tendre vers leurs limites quand $x_1 \to \pm\infty$, sans poids exponentiels.

2. Bien que c soit une valeur propre *non linéaire* pour le problème (P), les formules énoncées dans le théorème 1.2 ne sont pas sans rappeler les expressions min-max de la première valeur propre d'un opérateur elliptique L dans un domaine Ω avec des conditions aux limites de type Dirichlet sur $\partial\Omega$:

$$\lambda_1 = \max_{\substack{\phi \in W^{2,n}_{loc}(\Omega) \\ \phi > 0 \text{ dans } \Omega}} \inf_{\Omega} \left(-\frac{L\phi}{\phi} \right)$$

(*cf* [10] et [14]). Par ailleurs, les formules min-max du théorème 1.2 portent sur des quantités définies ponctuellement : $\gamma_y^{-1}\left(\frac{\Delta w + f(w)}{\partial_1 w}\right)$. Du fait de la dépendance *non linéaire* en c et de la dépendance en y, il ne semble pas clair que des formules min-max portant sur des intégrales de fonctions (pour des espaces fonctionnels du type $L^p_{loc}(\Sigma)$) puissent être obtenues, contrairement au cas des ondes planes (*cf* Rosen [27]).

3. Les formules min-max (1.2)-(1.6) s'appliquent aux vitesses d'ondes progressives définies dans des cylindres infinis $\Sigma = \mathbb{R} \times \omega$. Nous notons ici que, pour des non-linéarités f du type température d'ignition ou bistable (cas A ou B), des formules similaires pourraient immédiatement être obtenues pour les uniques vitesses c_a solutions de

$$\left\{ \begin{array}{rl} \Delta u_a - \beta(y, c_a)\partial_1 u_a + f(u_a) = 0 & \text{dans }]-a, a[\times\overline{\omega} \\ \partial_\nu u_a = 0 & \text{sur }]-a, a[\times\partial\omega \\ u_a(-a, \cdot) = 0,\ u_a(a, \cdot) = 1 & \\ \max_{\overline{\omega}} u_a(0, \cdot) = d & \end{array} \right.$$

dans des cylindres finis du type $\Sigma_a =]-a, a[\times\omega$, où le réel d, fixé dans $]0,1[$, est un paramètre de normalisation. Les vitesses c_a sont données par des formules min-max, que nous n'écrivons pas ici, qui sont exactement identiques à (1.2)-(1.3) mais en utilisant cette fois les espaces fonctionnels

$$E_a = \Big\{ w \in W^{2,p}(\overline{\Sigma_a} \backslash (\{\pm a\} \times \partial\omega)),\ \Delta w \in C(\overline{\Sigma_a}),\ 0 < w < 1 \text{ dans } \Sigma_a,$$

$$w(-a, \cdot) = 0,\ w(a, \cdot) = 1,\ \partial_1 w > 0 \text{ et } \max_{\overline{\omega}} w(0, \cdot) = d \Big\}$$

Ces formules min-max pour c_a ne sont pas surprenantes dans la mesure où Berestycki et Nirenberg ont prouvé que, en fixant $d = \theta$, ces vitesses c_a convergeaient vers l'unique vitesse c solution de (P) dans le cas A et solution de (P')-(S) dans le cas B.

Méthodes et plan. Alors qu'en dimension 1 le problème (P) peut se ramener à une étude dans le plan de phase, ce n'est plus vrai en dimension supérieure dans des cylindres infinis $\Sigma = \mathbb{R}\times\omega$ à cause de la dépendance en la coordonnée transversale y dans les équations de (P). La preuve du théorème 1.2 repose sur la théorie des sur- et sous-solutions pour les équations elliptiques dans des domaines bornés, ainsi que sur la méthode glissement de Berestycki et Nirenberg [8] dans des cylindres. On se sert aussi du comportement exponentiel des solutions u dans les deux directions asymptotiques $x_1 \to \pm\infty$ du cylindre Σ.

Dans la section 2, nous démontrons les formules (1.2) et (1.3) correspondant au cas A "avec température d'ignition". Dans la section 3, nous considérons le cas bistable B et montrons les formules (1.4) et (1.5). Enfin, la section 4 est consacrée au cas C ("KPP" ou "ZFK") et à la preuve de (1.6).

2 Cas avec "température d'ignition" (cas A)

2.1 Preuve de l'égalité (1.2)

On rappelle que le cas "température d'ignition" correspond à l'existence d'un réel $\theta \in]0,1[$ tel que $f \equiv 0$ sur $[0,\theta] \cup \{1\}$ et $f > 0$ sur $]\theta, 1[$.

D'après les résultats de Berestycki et Nirenberg [9], rappelés en introduction (théorème 1.1), on sait qu'il existe un unique couple (c,u) solution de (P), la fonction u étant unique à translation près par rapport à x_1. De plus, la fonction u est telle que $\partial_1 u > 0$ dans $\overline{\Sigma}$. En particulier, u appartient à l'ensemble E_A. Or d'après l'équation (P) vérifiée par u, on a, pour tout $x = (x_1, y) \in \overline{\Sigma}$,

$$\beta(y,c) = \frac{\Delta u + f(u)}{\partial_1 u},$$

d'où

$$c = \gamma_y^{-1}\left(\frac{\Delta u + f(u)}{\partial_1 u}\right) = \sup_{(x_1,y)\in\overline{\Sigma}} \gamma_y^{-1}\left(\frac{\Delta u + f(u)}{\partial_1 u}\right)$$

Ainsi,

$$c \geq \inf_{w\in E_A} \sup_{(x_1,y)\in\overline{\Sigma}} \gamma_y^{-1}\left(\frac{\Delta w + f(w)}{\partial_1 w}\right)$$

Pour montrer (1.2), il suffit maintenant de montrer cette dernière inégalité dans l'autre sens. Supposons par l'absurde qu'il existe une fonction $w \in E_A$ telle que

$$c > \sup_{(x_1,y)\in\overline{\Sigma}} \gamma_y^{-1}\left(\frac{\Delta w + f(w)}{\partial_1 w}\right)$$

Cette inégalité est même satisfaite avec $c-\varepsilon$ pour un certain $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. Comme $\partial_1 w > 0$, on peut donc écrire :

$$\begin{cases} \Delta w - \beta(y, c-\varepsilon)\partial_1 w + f(w) < 0 & \text{dans } \overline{\Sigma} \\ \partial_\nu w = 0 & \text{sur } \partial\Sigma \end{cases}$$

Par ailleurs, β est une fonction strictement croissante par rapport à c et la fonction u vérifie $\partial_1 u > 0$ dans $\overline{\Sigma}$. Il en découle que

$$\begin{cases} \Delta u - \beta(y, c-\varepsilon)\partial_1 u + f(u) > 0 & \text{dans } \overline{\Sigma} \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sur } \partial\Sigma \end{cases}$$

Finalement, w et u sont respectivement des sur- et sous-solutions du problème suivant

$$\begin{cases} \Delta v - \beta(y, c-\varepsilon)\partial_1 v + f(v) = 0 & \text{dans } \overline{\Sigma} \\ \partial_\nu v = 0 & \text{sur } \partial\Sigma \end{cases} \tag{2.1}$$

L'idée générale du raisonnement qui va suivre consiste à construire une solution v de ce problème (2.1) à partir de la sous-solution u et de la sur-solution w. Pour cela, en appliquant les résultats de Berestycki et Nirenberg [8], nous allons d'abord résoudre un problème équivalent à (2.1) dans des cylindres finis $[-a, a] \times \overline{\omega}$ et passer ensuite à la limite $a \to +\infty$.

Comme les fonctions u et w sont croissantes par rapport à x_1, les résultats énoncés dans [8] impliquent en particulier que si $w > u$ dans $[-a, a] \times \overline{\omega}$, alors il existe une unique solution v du problème suivant

$$\begin{cases} \Delta v - \beta(y, c-\varepsilon)\partial_1 v + f(v) = 0 & \text{dans } \Sigma_a =]-a, a[\times\omega \\ \partial_\nu v = 0 & \text{sur }]-a, a[\times\partial\omega \\ u \le v \le w & \text{dans } \overline{\Sigma_a} \\ v(-a, \cdot) = u(-a, \cdot),\ v(a, \cdot) = w(a, \cdot) & \end{cases} \tag{2.2}$$

Remarquons alors que les translatées $u_t := u(x_1+t, y)$ et $w_{t'} = w(x_1+t', y)$ de u et w suivant la direction x_1 restent toujours respectivement des sous- et sur-solutions du problème (2.1). De plus, si $\min_{\overline{\omega}} u_t(-a, \cdot)$ est suffisamment proche de 1 avec la condition $u_t \le w_{t'}$ dans $\overline{\Sigma_a}$ (ce qui est toujours réalisable pour t' suffisamment grand car u est continue, strictement inférieure à 1 dans $\overline{\Sigma}$ et $w(+\infty, \cdot) = 1$), alors la fonction v unique solution de (2.1) sera elle-même proche de 1. De façon similaire, si $\max_{\overline{\omega}} w_{t'}(+a, \cdot)$ est suffisamment proche de 0, en supposant toujours que $u_t \le w_{t'}$, alors v sera également proche de 0. D'après les estimations elliptiques standard jusqu'au bord, les solutions v de (2.2) dépendent continûment de $\min_{\overline{\omega}} u_t(-a, \cdot)$ et de $\max_{\overline{\omega}} w_{t'}(a, \cdot)$ (et donc de t et t') dans les espaces $W^{2,p}_{loc}(\overline{\Sigma_a} \setminus \{\pm a\} \times \overline{\omega})$ et $C(\overline{\Sigma_a})$ (en se restreignant sur l'ensemble des couples (t, t') tels que $u_t \le w_{t'}$ sur $\overline{\Sigma_a}$). Finalement, il existe donc des translatées de u et w telles que la solution v de (2.2), que l'on nomme v_a, vérifie la condition de normalisation

$$\max_{\overline{\omega}} v_a(0, \cdot) = \frac{1+\theta}{2}$$

Comme les fonctions $\beta(y, c-\varepsilon)$ et $f(v_a)$ sont bornées indépendamment de a, les estimations elliptiques standard impliquent que les fonctions v_a sont bornées dans les espaces $W^{2,p}(K)$ pour tout compact $K \subset \overline{\Sigma}$ et pour tout $p > 1$. D'après les injections de Sobolev, on peut donc passer à la limite $v_a \to v$ dans $C^{1,\mu}_{loc}(\overline{\Sigma})$ (pour tout $0 \leq \mu < 1$) et $W^{2,p}_{loc}(\overline{\Sigma})$-*faible* (pour tout $p > 1$) pour une certaine suite $a \to +\infty$. Comme ∇v et $f(v)$ sont continus jusqu'au bord de Σ, la fonction limite v vérifie

$$\begin{cases} \Delta v - \beta(y, c-\varepsilon)\partial_1 v + f(v) = 0 & \text{dans } \overline{\Sigma} \\ \partial_\nu v = 0 & \text{sur } \partial\Sigma \\ 0 \leq v \leq 1 & \text{dans } \overline{\Sigma} \\ \max\limits_{\overline{\omega}} v(0,\cdot) = \dfrac{1+\theta}{2} & \end{cases}$$

De plus, comme $\partial_1 v \geq 0$, la fonction v possède des limites quand $x_1 \to \pm\infty$, à savoir

$$\lim_{x_1 \to \pm\infty} v(x_1, y) = \psi_\pm(y)$$

D'après les estimations elliptiques standard (en considérant des fenêtres de taille fixée tendant vers $\pm\infty$), on déduit que $\partial_1 v \underset{x_1 \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0$. En particulier, les fonctions $\psi_\pm$ sont solutions de

$$\begin{cases} \Delta\psi_\pm + f(\psi_\pm) = 0 & \text{dans } \omega \\ \partial_\nu \psi_\pm = 0 & \text{sur } \partial\omega \end{cases}$$

Comme en outre $f(\psi_\pm) \geq 0$ dans $\overline{\omega}$, en intégrant les équations ci-dessus, il vient que les fonctions $\psi_\pm$ sont en réalité des constantes $\gamma_\pm$ telles que $f(\gamma_\pm) = 0$. Or, $\gamma_+ \geq (1+\theta)/2$, et donc $\gamma_+ = 1$ car $f > 0$ sur $]\theta, 1[$. D'autre part, $\gamma_- \in [0, \theta]$.

Pour obtenir finalement une contradiction, nous allons comparer u et v. Pour cela, étudions le comportement de u et v au voisinage de $\pm\infty$. D'après les résultats de Agmon, Nirenberg [1] et Berestycki, Nirenberg [9], il existe des fonctions ϕ et $\phi' > 0$ définies sur $\overline{\omega}$ et des constantes μ et $\mu' < 0$ telles que

$$u(x_1, y) = 1 - e^{\mu x_1}\phi(y) + o(e^{\mu x_1}) \text{ quand } x_1 \to +\infty$$

$$v(x_1, y) = 1 - e^{\mu' x_1}\phi'(y) + o(e^{\mu' x_1}) \text{ quand } x_1 \to +\infty$$

De plus, on a $\mu' < \mu < 0$ car $\beta(y, c-\varepsilon) < \beta(y, c)$ pour tout $y \in \overline{\omega}$ (Théorème 2.1-e [9]). Ainsi, $u < v < 1$ au voisinage de $+\infty$.

D'autre part, si $\gamma_- = 0$, alors $(c-\varepsilon, v)$ est solution de (P). D'après le résultat d'unicité rappelé dans le théorème 1.1, on obtiendrait directement une contradiction, à savoir $c - \varepsilon = c$.

Dans le cas contraire où $\gamma_- > 0$, on a donc $u < v$ au voisinage de $-\infty$. Finalement, il existe $R > 0$ tel que

$$|x_1| \geq R \Rightarrow u(x_1, y) < v(x_1, y)$$

Par ailleurs, u est bornée sur le compact $[-R, +R] \times \overline{\omega}$ et est strictement inférieure à 1 sur ce compact. Puisque $v \to 1$ quand $x_1 \to +\infty$ uniformément par rapport à $y \in \overline{\omega}$, il existe donc $\tau > 0$ tel que

$$u(x_1, y) < v(x_1 + \tau, y) =: v_\tau(x_1, y) \quad \forall\ (x_1, y) \in [-R, +R] \times \overline{\omega}$$

Comme v est croissante par rapport à x_1, on en déduit que

$$u(x_1, y) < v(x_1 + \tau, y) \text{ dans } \overline{\Sigma}$$

Ensuite, on translate v vers la droite (c'est-à-dire qu'on diminue τ) jusqu'à ce que le graphe de v touche celui de u en un point de $\overline{\Sigma}$. Cela se produit nécessairement d'après les comportements de u et v en $\pm\infty$. Ainsi, il existe s tel que $u(x_1, y) \leq v(x_1 + s, y) =: v_s(x_1, y)$ dans $\overline{\Sigma}$ avec égalité quelque part. La fonction $z := u - v_s$ vérifie donc :

$$\begin{cases} \Delta z - \beta(y,c)\partial_1 z + (f(u) - f(v_s)) & = (\beta(y,c) - \beta(y, c-\varepsilon))\partial_1 v_s \\ & \geq 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{dans } \overline{\Sigma} \\ \partial_\nu z & = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{sur } \partial\Sigma \end{cases}$$

De plus, $f(u) - f(v_s)$ peut s'écrire sous la forme $c(x)z$ avec $c(x)$ bornée car f est lipschitzienne. Le principe du maximum fort et le lemme de Hopf permettent de conclure que $z \equiv 0$ dans $\overline{\Sigma}$, c'est-à-dire $u \equiv v_s$. Ceci est impossible car, par exemple, u et v ne tendent pas vers la même limite quand $x_1 \to -\infty$. Ceci achève la démonstration de (1.2) dans le cas A.

2.2 Preuve de l'égalité (1.3)

Comme dans la section précédente, on a facilement

$$c \leq \sup_{w \in E_A} \inf_{(x_1,y)\in\overline{\Sigma}} \gamma_y^{-1}\left(\frac{\Delta w + f(w)}{\partial_1 w}\right)$$

avec égalité entre c et l'inf pour la fonction u solution de (P). Il reste donc à montrer l'autre sens de l'inégalité. Pour cela, on raisonne toujours par l'absurde, en supposant qu'il existe une fonction w dans E_A et un réel $\varepsilon > 0$ tels que

$$c + \varepsilon < \inf_{(x_1,y)\in\overline{\Sigma}} \gamma_y^{-1}\left(\frac{\Delta w + f(w)}{\partial_1 w}\right)$$

Remarquons tout de suite qu'en appliquant le raisonnement de la section précédente, on trouverait une solution v de (P) avec la vitesse $c + \varepsilon$ et telle que $v(-\infty, \cdot) = \gamma_- \in [0, \theta]$. Si $\gamma_- > 0$, on n'obtiendrait en fait aucune contradiction.

La fonction w introduite ci-dessus vérifie cette fois

$$\begin{cases} \Delta w - \beta(y, c+\varepsilon)\partial_1 w + f(w) > 0 & \text{dans } \overline{\Sigma} \\ \partial_\nu w = 0 & \text{sur } \partial\Sigma \\ w(-\infty, \cdot) = 0,\ w(+\infty, \cdot) = 1 & \\ \partial_1 w > 0 & \text{dans } \overline{\Sigma} \end{cases}$$

D'autre part, d'après les résultats de Berestycki, Nirenberg [9], pour tout $\eta \in [0, \theta[$, il existe un unique couple (c_η, u_η) solution de

$$\begin{cases} \Delta u_\eta - \beta(y, c_\eta)\partial_1 u_\eta + f(u_\eta) = 0 & \text{dans } \overline{\Sigma} \\ \partial_\nu u_\eta = 0 & \text{sur } \partial\Sigma \\ u_\eta(-\infty, \cdot) = \eta,\ u_\eta(+\infty, \cdot) = 1 & \end{cases} \tag{2.3}$$

où u_η vérifie en outre : $\partial_1 u_\eta > 0$ dans $\overline{\Sigma}$. La Proposition 7.1 de [9] permet d'affirmer que les réels c_η sont en réalité strictement croissants et continus par rapport à η. Ainsi, il existe $\eta > 0$ tel que $c < c_\eta < c + \varepsilon$. L'idée du raisonnement qui va suivre est de construire une solution v du problème suivant

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta v - \beta(y, c+\varepsilon)\partial_1 v + f(v) = 0 &\quad \text{dans } \overline{\Sigma} \\ \partial_\nu v = 0 &\quad \text{sur } \partial\Sigma \end{aligned} \right. \tag{2.4}$$

avec les conditions aux limites $v(-\infty, \cdot) \leq \eta$ et $v(+\infty, \cdot) = 1$.

Pour cela, fixons la fonction w. Nous avons vu que cette fonction w était une sous-solution du problème (2.4). Considérons alors des réels a suffisamment grands ($a \geq a_0$) pour que

$$\max_{\overline{\omega}} w(-a, \cdot) < \eta \tag{2.5}$$

On translate alors la solution u de (P) d'un pas t_a vers la gauche de telle sorte que $u_{t_a} = u(x_1 + t_a, y) > w$ sur $[-a, a] \times \overline{\omega}$. On observe que

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta u_{t_a} - \beta(y, c+\varepsilon)\partial_1 u_{t_a} + f(u_{t_a}) &= (\beta(y,c) - \beta(y, c+\varepsilon))\partial_1 u_{t_a} & \\ &< 0 & \text{dans } \overline{\Sigma} \\ \partial_\nu u &= 0 & \text{sur } \partial\Sigma \end{aligned} \right.$$

car $\beta(\cdot, c+\varepsilon) > \beta(\cdot, c)$ dans $\overline{\omega}$ et $\partial_1 u > 0$ dans $\overline{\Sigma}$. Ainsi, u_{t_a} est une sur-solution pour le problème (2.4). Comme u_{t_a} et w sont de plus croissantes par rapport à x_1, les résultats de Berestycki et Nirenberg [8] s'appliquent et il existe une unique solution v_a de

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta v_a - \beta(y, c+\varepsilon)\partial_1 v_a + f(v_a) = 0 &\quad \text{dans } \Sigma_a =]-a, a[\times\omega \\ \partial_\nu v_a = 0 &\quad \text{sur }]-a, a[\times\partial\omega \\ w \leq v_a \leq u_{t_a} &\quad \text{dans } \overline{\Sigma_a} \\ v_a(-a, \cdot) = w(-a, \cdot) \text{ et } v_a(a, \cdot) = u_{t_a}(a, \cdot) & \end{aligned} \right. \tag{2.6}$$

De plus, $\partial_1 v_a \geq 0$. D'après les estimations elliptiques jusqu'au bord, il existe une fonction v et une suite $a \to +\infty$ telles que $v_a \to v$ dans $C^{1,\mu}_{loc}(\overline{\Sigma})$ et $W^{2,p}_{loc}(\overline{\Sigma})$-*faible*, où v est une solution du problème (2.4) telle que $v(\pm\infty, \cdot) = \gamma_\pm$ et $v \geq w$. En particulier, on a $v(+\infty, \cdot) = \gamma_+ = 1$.

D'autre part, comme il a été montré dans [9], il existe un unique couple (c^a_η, v'_a) solution de

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta v'_a - \beta(y, c^a_\eta)\partial_1 v'_a + f(v'_a) = 0 &\quad \text{dans } \Sigma_a \\ \partial_\nu v'_a = 0 &\quad \text{sur }]-a, a[\times\partial\omega \\ v'_a(-a, \cdot) = \eta \text{ et } v'_a(a, \cdot) = 1 & \\ \max_{\overline{\omega}} v'_a(0, \cdot) = \theta & \end{aligned} \right.$$

Par construction de la solution (c_η, u_η) de (2.3) dans [9], on a aussi

$$c^a_\eta \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} c_\eta$$

et
$$v'_a \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} v_\eta \text{ dans } C^{1,\mu}_{loc}(\overline{\Sigma}) \text{ et } W^{2,p}_{loc}(\overline{\Sigma}) - faible$$

Pour a suffisamment grand, on a $c_\eta^a < c+\varepsilon$ et donc $\beta(y,c_\eta^a) < \beta(y,c+\varepsilon)$ pour tout $y \in \overline{\omega}$ car β est strictement croissante par rapport à c. L'hypothèse (2.5) permet d'affirmer que $v_a(-a,\cdot) = w(-a,\cdot) \leq \eta = v_a'$ sur la section $\{-a\} \times \overline{\omega}$. Par ailleurs, $v_a \leq 1 = v_a'$ sur $\{a\} \times \overline{\omega}$. Avec toutes ces hypothèses, le Lemme 5.1 et le Corollaire 5.1 de [9] (méthodes de translation de domaines) impliquent que $v_a \leq v_a'$ dans $\overline{\Sigma_a}$. Par passage à la limite $a \to +\infty$, on obtient finalement que

$$w \leq v \leq v_\eta \text{ dans } \overline{\Sigma}$$

Ainsi, v est une solution de (2.4) avec $v(+\infty,\cdot) = 1$ et $v(-\infty,\cdot) = \gamma_- \in [0,\eta]$. En d'autres termes, avec les définitions précédentes, v est solution de (2.3) avec la vitesse $c+\varepsilon$ et la limite γ_- en $-\infty$. Par unicité des solutions de (2.3), on conclut que $c+\varepsilon = c_{\gamma_-} \leq c_\eta$ car $\gamma_- \leq \eta$. Ceci contredit le fait que $c_\eta < c+\varepsilon$. L'hypothèse initiale d'existence de w était donc absurde. Ceci achève la démonstration de l'égalité (1.3).

3 Etude du cas "bistable" (cas B)

On démontre d'abord (1.5) dans la section 3.1 et ensuite (1.4) dans la section 3.2.

3.1 Preuve de l'égalité (1.5)

On rappelle que pour une non-linéarité f du type bistable, on suppose qu'il existe un réel $\theta \in]0,1[$ tel que $f(0) = f(\theta) = f(1) = 0$ et $f < 0$ sur $]0,\theta[$, $f > 0$ sur $]\theta,1[$. De la même façon que dans la section 2 pour le cas avec température d'ignition, on a directement

$$\inf_{w \in E_B} \sup_{(x_1,y) \in \overline{\Sigma}} \gamma_y^{-1} \left(\frac{\Delta w + f(w)}{\partial_1 w} \right) \leq c \leq \sup_{w \in E_B} \inf_{(x_1,y) \in \overline{\Sigma}} \gamma_y^{-1} \left(\frac{\Delta w + f(w)}{\partial_1 w} \right)$$

avec égalité des sup et inf (portant sur les points $(x_1,y) \in \overline{\Sigma}$) pour la solution u du problème (P')-(S). L'objectif de cette sous-section est de montrer que la deuxième inégalité est en fait une égalité.

On raisonne une nouvelle fois par l'absurde. On suppose qu'il existe une fonction $w \in E_B$ et un réel $\varepsilon > 0$ tels que

$$c + \varepsilon < \inf_{(x_1,y) \in \overline{\Sigma}} \gamma_y^{-1} \left(\frac{\Delta w + f(w)}{\partial_1 w} \right)$$

Alors

$$\begin{cases} \Delta w - \beta(y, c+\varepsilon)\partial_1 w + f(w) > 0 & \text{dans } \overline{\Sigma} \\ \partial_\nu w = 0 & \text{sur } \partial\Sigma \\ w(-\infty,\cdot) = 0, \ w(+\infty,y) = \psi(y) & \end{cases}$$

Les fonctions u et w sont respectivement sur- et sous-solutions du problème (2.4) défini dans la section 2.2. Dans le cylindre borné $[-a,a] \times \overline{\omega}$, quitte à translater u et w tout en maintenant la condition $w < u$, il existe une fonction v_a solution de (2.6) telle que $\partial_1 v_a \geq 0$ et vérifiant de plus la condition de normalisation

$$\max_{\overline{\omega}} v_a(0,\cdot) = \theta/2$$

Notons bien que ceci est possible car la limite $\psi(y)$ de u et w quand $x_1 \to +\infty$ est telle que ou bien $\psi \equiv 1$, ou bien $\psi < 1$ et dans ce dernier cas, d'après le profil de f, on a : $\theta/2 < \theta < \max\ \psi$ (*cf* [9]).

Comme dans les sections précédentes, on passe à la limite pour une certaine suite $a \to +\infty$. La fonction limite v vérifie :

$$\begin{cases} \Delta v - \beta(y, c+\varepsilon)\partial_1 v + f(v) &= 0 \qquad \text{dans } \overline{\Sigma} \\ \partial_\nu v &= 0 \qquad \text{sur } \partial\Sigma \\ v(\pm\infty, \cdot) &= \psi_\pm(y) \\ \partial_1 v &\geq 0 \qquad \text{dans } \overline{\Sigma} \\ \max\limits_{\overline{\omega}} v(0,\cdot) &= \theta/2 \end{cases}$$

où les fonctions $\psi_\pm$ sont solutions du problème limite (S) défini dans l'introduction :

$$\begin{cases} \Delta\psi_\pm + f(\psi_\pm) = 0 & \text{dans } \overline{\omega} \\ \partial_\nu \psi_\pm = 0 & \text{sur } \partial\omega \end{cases}$$

Comme $\partial_1 v \geq 0$, on a $v \leq \theta/2$ dans $]-\infty, 0] \times \overline{\omega}$ et donc $\psi_- \leq \theta/2$. Or, $f < 0$ sur $]0, \theta[$. Par conséquent, en intégrant l'équation vérifiée par ψ_-, on conclut que ψ_- est une constante inférieure ou égale à $\theta/2$ avec $f(\psi_-) = 0$. D'où $\psi_- = 0$. Finalement ceci prouve que v est une solution de (P') avec la vitesse $c + \varepsilon$ et la limite $\psi_+(y)$ en $+\infty$, où $\psi_+ \leq \psi$. Deux cas sont alors envisageables :

1) $\psi_+ \equiv \psi$. Dans ce cas, le résultat d'unicité du théorème 1.1 implique que $c + \varepsilon = c$, ce qui est clairement impossible.

2) dans l'autre cas, le principe du maximum et le lemme de Hopf permettent d'affirmer que $\psi_+ < \psi$ sur $\overline{\omega}$. Ainsi, $v < u$ au voisinage de $+\infty$. D'autre part, d'après les résultats de [1], [9], les comportements de u et v en $-\infty$ s'écrivent :

$$\begin{array}{llll} u(x_1, y) & = e^{\lambda x_1}\phi(y) & +o(e^{\lambda x_1}) & \text{quand } x_1 \to -\infty \\ v(x_1, y) & = e^{\lambda' x_1}\phi'(y) & +o(e^{\lambda' x_1}) & \text{quand } x_1 \to -\infty \end{array}$$

où ϕ et ϕ' sont des fonctions positives définies sur $\overline{\omega}$. De plus, comme $\beta(y, c) < \beta(y, c+\varepsilon)$ sur $\overline{\omega}$, on a $0 < \lambda < \lambda'$ ([9]). Ainsi, $v < u$ au voisinage de $-\infty$ et donc finalement $v < u$ au voisinage de $\pm\infty$. Comme v est en fait une sous-solution pour le problème (P'), on conclut finalement à une absurdité par une méthode de glissement comme dans la section 2.1.

Remarque 3.1 *Ces méthodes de sur et sous-solutions ne permettent pas d'obtenir l'égalité (1.4) pour le cas B. Il faudrait justement, pour aboutir à une contradiction, construire une sur-solution v pour une vitesse $c - \varepsilon$ et qui vaille ψ en $+\infty$. Mais, même en fixant la fonction u qui jouerait le rôle de sous-solution, rien n'empêcherait d'obtenir à la limite une fonction v identiquement égale à ψ. D'autre part, même une condition de normalisation sur $\{0\} \times \overline{\omega}$ du type $\min\limits_{\overline{\omega}} u_a(0,\cdot) = d < \min\limits_{\overline{\omega}} \psi$ ne permettrait pas de conclure car on ne pourrait pas identifier la limite en $+\infty$ (contrairement à la preuve de (1.2) dans la section 2.1 où on a pu construire une fonction v pour la vitesse $c - \varepsilon$ et telle que $v(+\infty, \cdot) = 1$).*

Un autre raisonnement va être utilisé dans la section 3.2 pour démontrer (1.4). Il aurait pu être adapté pour démontrer (1.2), (1.3) et (1.5) mais nous avons préféré l'approche plus "constructive" des sur- et sous- solutions.

3.2 Preuve de l'égalité (1.4)

On rappelle que sous les hypothèses (1.1), le couple (c, u) est l'unique solution de (P')-(S). Dans la suite, pour tout opérateur elliptique L dans ω avec conditions de Neumann sur $\partial\omega$, nous noterons $\mu_1(-L)$ la première valeur propre de $-L$.

Pour démontrer (1.4), on raisonne comme précédemment par l'absurde : on suppose donc qu'il existe une fonction $w \in E_B$ et un réel $\varepsilon > 0$ tels que

$$\sup_{(x_1,y)\in\overline{\Sigma}} \gamma_y^{-1}\left(\frac{\Delta w + f(w)}{\partial_1 w}\right) < c - \varepsilon$$

La fonction w vérifie alors :

$$\begin{cases} \Delta w - \beta(c-\varepsilon, y)\partial_1 w + f(w) \leq 0 & \text{dans } \overline{\Sigma} \\ \partial_\nu w = 0 & \text{sur } \partial\Sigma \\ w(-\infty, \cdot) = 0, \quad w(+\infty, y) = \psi(y) & \end{cases} \tag{3.1}$$

A l'aide de majorations sur les comportements exponentiels de u et w en $\pm\infty$, on va pouvoir comparer ces deux fonctions u et w. D'après les résultats de [1], [9], le comportement de u quand $x_1 \to +\infty$ s'écrit :

$$u(x_1, y) = \psi(y) - e^{\mu x_1}\phi(y) + o(e^{\mu x_1}) \ \text{ quand } x_1 \to +\infty \tag{3.2}$$

où μ est une constante strictement négative et ϕ est une fonction strictement positive sur $\overline{\omega}$, qui sont solutions de

$$\begin{cases} -\Delta_y\phi + (\mu\beta(y,c) - f'(\psi(y)))\phi &= \mu^2\phi \quad \text{dans } \overline{\omega} \\ \partial_\nu\phi &= 0 \quad \text{sur } \partial\omega \end{cases}$$

D'après les Propositions 2.1 et 2.2 de [9], la fonction

$$g \ : \ t \mapsto \mu_1(-\Delta_y + t\beta(y,c) - f'(\psi(y)))$$

est concave, et pour tout $t < 0$, elle est strictement décroissante par rapport à β (cela provient de l'expression variationnelle de $g(t)$). Comme $g(0) = \mu_1(-\Delta_y - f'(\psi(y))) > 0$, μ est ainsi l'unique solution strictement négative de l'équation $g(\mu) = \mu^2$. Introduisons alors la fonction

$$g_\varepsilon \ : \ t \mapsto \mu_1(-\Delta_y + t\beta(y, c-\varepsilon) - f'(\psi(y)))$$

De la même façon, il existe une unique solution $\mu_\varepsilon < 0$ de l'équation $g_\varepsilon(\mu_\varepsilon) = \mu_\varepsilon^2$. De plus, comme $g_\varepsilon(0) = g(0) = \mu_1(-\Delta_y - f'(\psi(y))) > 0$ et que $\beta(y, c-\varepsilon) < \beta(y,c)$ sur $\overline{\omega}$, on en déduit que $g_\varepsilon(t) > g(t)$ pour tout $t < 0$ et donc que $\mu_\varepsilon < \mu < 0$.

D'autre part, par continuité, la solution $t_\eta < 0$ de l'équation

$$\mu_1(-\Delta_y + t_\eta\beta(y, c-\varepsilon) - (f'(\psi(y)) + \eta)) = t_\eta^2$$

existe pour $\eta > 0$ suffisamment petit et est continue par rapport à η. Ainsi, $t_\eta \underset{\eta\to 0}{\to} \mu_\varepsilon$ et donc il existe $\eta_0 > 0$ suffisamment petit de telle sorte que

$$t_{\eta_0} < \mu < 0 \tag{3.3}$$

Soit ϕ_{η_0} une fonction propre (strictement positive sur $\overline{\omega}$) de l'opérateur $-\Delta_y + t_{\eta_0}\beta(y, c-\varepsilon) - (f'(\psi(y)) + \eta_0)$ pour la première valeur propre $t_{\eta_0}^2$. La fonction $v_{\eta_0}(x_1, y) = e^{t_{\eta_0}x_1}\phi_{\eta_0}(y) > 0$ est solution de

$$\left\{ \begin{array}{rl} \Delta v_{\eta_0} - \beta(y, c-\varepsilon)\partial_1 v_{\eta_0} + (f'(\psi(y)) + \eta_0)v_{\eta_0} = 0 & \text{dans } \overline{\Sigma} \\ \partial_\nu v_{\eta_0} = 0 & \text{sur } \partial\Sigma \end{array} \right.$$

D'après (3.1) et (S), on a $\Delta(\psi - w) - \beta(y, c-\varepsilon)\partial_1(\psi - w) + f(\psi) - f(w) \geq 0$ dans $\overline{\Sigma}$. Par ailleurs, comme $w(x_1, y) \xrightarrow{<} \psi(y)$ quand $x_1 \to +\infty$, on a

$$f(\psi) - f(w) \leq (\psi(y) - w)(f'(\psi(y)) + \eta_0) \quad \forall\ x_1 \geq N,\ y \in \overline{\omega}$$

pour N suffisamment grand. Ainsi,

$$\left\{ \begin{array}{rl} \Delta(\psi - w) - \beta(y, c-\varepsilon)\partial_1(\psi - w) + (f'(\psi(y)) + \eta_0)(\psi - w) \geq 0 & \text{dans } [N, +\infty[\times\overline{\omega} \\ \partial_\nu(\psi - w) = 0 & \text{sur } [N, +\infty[\times\partial\omega \end{array} \right.$$

Quitte à multiplier v_{η_0} par une constante strictement positive, on peut supposer que $\psi - w \leq v_{\eta_0}$ sur la section $\{N\} \times \overline{\omega}$. Posons alors $z = \psi - w - v_{\eta_0}$. On obtient que

$$\left\{ \begin{array}{rl} \Delta z - \beta(y, c-\varepsilon)\partial_1 z + (f'(\psi) + \eta_0)z \geq 0 & \text{dans } [N, +\infty[\times\overline{\omega} \\ \partial_\nu z = 0 & \text{sur } [N, +\infty[\times\partial\omega \\ z(N, \cdot) \leq 0,\ z(+\infty, \cdot) = 0 & \end{array} \right.$$

Comme le terme d'ordre 0, $f'(\psi(y)) + \eta_0$, n'est pas a priori négatif, on ne peut pas utiliser directement le principe du maximum pour conclure que $z \leq 0$ dans $[N, +\infty[\times\overline{\omega}$. On pose alors $\mu_1 = \mu_1(-\Delta - (f'(\psi) + \eta_0)) > 0$ et on introduit la fonction propre $\sigma > 0$ sur $\overline{\omega}$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{rll} -\Delta_y\sigma - (f'(\psi) + \eta_0)\sigma & = \mu_1\sigma & \text{dans } \overline{\omega} \\ \partial_\nu\sigma & = 0 & \text{sur } \partial\omega \end{array} \right.$$

La fonction $h = \dfrac{z}{\sigma}$ vérifie alors

$$\left\{ \begin{array}{rl} \Delta h - \beta(y, c-\varepsilon)\partial_1 h + 2\frac{\nabla_y\sigma}{\sigma} \cdot \nabla_y h - \mu_1 h \geq 0 & \text{dans } [N, +\infty[\times\overline{\omega} \\ \partial_\nu h = 0 & \text{sur } [N, +\infty[\times\partial\omega \\ h \leq 0 \text{ sur } \{N\} \times \overline{\omega} \ \text{ et } h(+\infty, \cdot) = 0 & \end{array} \right.$$

Comme $-\mu_1 \leq 0$, le principe du maximum et le lemme de Hopf impliquent que h est négative dans $[N, +\infty[\times\overline{\omega}$. En conséquence, $z = \psi - w - v_{\eta_0} \leq 0$, *i.e.*

$$w(x_1, y) \geq \psi(y) - e^{t_{\eta_0}x_1}\phi_{\eta_0}(y) \text{ dans } [N, +\infty[\times\overline{\omega} \tag{3.4}$$

D'après (3.2), (3.3) et (3.4), on conclut qu'il existe $N' \geq N$ tel que

$$w \geq u \text{ dans } [N', +\infty[\times\overline{\omega}$$

De manière similaire, on pourrait démontrer que $w \geq u$ au voisinage de $-\infty$ en comparant les comportements exponentiels de w et u. Ainsi, comme dans la section 2, on peut translater

w vers la gauche puis vers la droite de telle sorte que $w \geq u$ dans $\overline{\Sigma}$ avec égalité quelque part (quitte à renommer w cette translatée de w). On note $z = w - u$. Il existe alors une fonction bornée $c(x_1, y)$ telle que

$$\begin{cases} \Delta z - \beta(y, c-\varepsilon)\partial_1 z + c(x_1, y)z & \leq (\beta(y, c-\varepsilon) - \beta(y, c))\partial_1 u \\ & \leq 0 \ \text{ dans } \overline{\Sigma} \\ \partial_\nu z & = 0 \ \text{ sur } \partial\Sigma \end{cases}$$

D'après le principe du maximum et le lemme de Hopf, on conclut que $w \equiv u$ dans $\overline{\Sigma}$ ce qui est clairement impossible car w et u ont des comportements exponentiels avec des exposants différents quand $x_1 \to +\infty$.

Remarque 3.2 *L'hypothèse $\mu_1(-\Delta \cdot - f'(\psi(y))\cdot) > 0$, qui est l'analogue de $f'(1) < 0$ dans le cas A, a été utilisée de manière cruciale dans ces raisonnements pour pouvoir garantir l'unicité de la vitesse c et la stricte croissance de la fonction u. Notons en effet que sans cette hypothèse, ces propriétés ne sont plus garanties.*

4 Expression de c^* dans le cas C ("KPP" ou "ZFK") : preuve de l'égalité (1.6)

Dans cette section, le terme non linéaire f est tel que $f(0) = f(1) = 0$ et $f > 0$ sur $]0, 1[$. D'après le théorème 1.1 rappelé en introduction, on sait qu'il existe une unique fonction $0 < u^* < 1$ strictement croissante par rapport à x_1 et solution de

$$\begin{cases} \Delta u^* - \beta(y, c^*)\partial_1 u^* + f(u^*) = 0 & \text{dans } \overline{\Sigma} \\ \partial_\nu u^* = 0 & \text{sur } \partial\Sigma \\ u^*(-\infty, \cdot) = 0, \ u^*(+\infty, \cdot) = 1 & \end{cases}$$

Il en découle que la vitesse minimale c^* de toutes les vitesses c solutions de (P) est telle que

$$c^* \equiv \gamma_y^{-1}\left(\frac{\Delta u^* + f(u^*)}{\partial_1 u^*}\right) = \sup_{(x_1, y)\in\overline{\Sigma}} \gamma_y^{-1}\left(\frac{\Delta u^* + f(u^*)}{\partial_1 u^*}\right)$$

La démonstration de l'égalité (1.6) est similaire à la preuve de (1.2) dans la section 2.1. Supposons par l'absurde que (1.6) est fausse. Ainsi, il existe une fonction $w \in E_{AC}$ et un réel $\varepsilon > 0$ tels que

$$c^* - \varepsilon > \sup_{(x_1, y)\in\overline{\Sigma}} \gamma_y^{-1}\left(\frac{\Delta w + f(w)}{\partial_1 w}\right)$$

Les fonctions u^* et w sont alors toujours respectivement des sous- et sur-solutions du problème (2.1) avec cette fois la vitesse $c^* - \varepsilon$ au lieu de $c - \varepsilon$. Comme dans la section 2.1, mais en normalisant cette fois à 1/2 sur la section $\{0\} \times \overline{\omega}$, on peut construire des fonctions v_a sur $[-a, a] \times \overline{\omega}$, croissantes par rapport à x_1 et solutions de

$$\begin{cases} \Delta v_a - \beta(y, c^* - \varepsilon)\partial_1 v_a + f(v_a) & = 0 & \text{dans }]-a, a[\times\overline{\omega} \\ \partial_\nu v_a & = 0 & \text{sur }]-a, a[\times\partial\omega \\ \max_{\overline{\omega}} v_a(0, \cdot) & = 1/2 & \end{cases}$$

Comme $f > 0$ sur $]0,1[$ et que les fonctions v_a sont croissantes par rapport à x_1, on obtient directement par passage à la limite une solution v du problème

$$\begin{cases} \Delta v - \beta(y, c^* - \varepsilon)\partial_1 v + f(v) & = 0 \qquad \text{dans } \overline{\Sigma} \\ \partial_\nu v & = 0 \qquad \text{sur } \partial\Sigma \\ \max_{\overline{\omega}} v(0,\cdot) & = 1/2 \\ v(-\infty,\cdot) = 0, \ v(+\infty,\cdot) & = 1 \end{cases}$$

Ainsi, le couple $(c^* - \varepsilon, v)$ est une solution de (P), ce qui est en contradiction avec la définition de c^* et achève la démonstration de (1.6).

Remarque 4.1 *La preuve des formules (1.2) et (1.3) dans le cas avec température d'ignition (cas A) aurait également pu se faire en utilisant des résultats indépendants de Vega [30]. Ces résultats s'appliquent à des solutions u de problèmes du type (P) lorsque la non-linéarité f est décroissante au voisinage de 0 et de 1. Cependant, à cause de ces restrictions sur le comportement de f, ces résultats ne s'appliqueraient pas à la solution u de (P')-(S) dans le cas bistable B (à cause du fait que $u(+\infty,\cdot) = \psi$) ni à la solution (c^*, u^*) de (P) dans le cas C "KPP-ZFK" (car $f'(0) > 0$).*

References

[1] S. Agmon, L. Nirenberg, *Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach space*, Comm. Pure Appl. Math. **16** (1963), pp 121-239.

[2] D.G. Aronson, H.F. Weinberger, *Nonlinear diffusion in population genetics, combustion and nerve propagation*, In: Part. Diff. Eq. and Related Topics, Lectures Notes in Math. **446**, Springer, New York, 1975, pp 5-49.

[3] H. Berestycki, L. Caffarelli, L. Nirenberg, *Uniform estimates for regularisation of free boundary problems*, In: Anal. and Part. Diff. Eq., C. Sadosky & M. Decker Eds., 1990, pp 567-617.

[4] H. Berestycki, F. Hamel, *Non-existence de fronts progressifs pour une équation de réaction-diffusion de type "bistable"*, C. R. Acad. Sci. Paris **321 I** (1995), pp 287-292.

[5] H. Berestycki, B. Larrouturou, *A semilinear elliptic equation in a strip arising in a two-dimensional flame propagation model*, J. Reine Angew. Math. **396** (1989), pp 14-40.

[6] H. Berestycki, B. Larrouturou, P.L. Lions, *Multidimensional travelling-wave solutions of a flame propagation model*, Arch. Rat. Mech. Anal. **111** (1990), pp 33-49.

[7] H. Berestycki, B. Nicolaenko, B. Scheurer, *Traveling waves solutions to combustion models and their singular limits*, SIAM J. Math. Anal. **16** (1985), pp 1207-1242.

[8] H. Berestycki, L. Nirenberg, *On the method of moving planes and the sliding method*, Bol. da Soc. Brasileira de Matematica **22** (1991), pp 1-37.

[9] H. Berestycki, L. Nirenberg, *Travelling fronts in cylinders*, Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Lin. **9** (1992), pp 497-572.

[10] H. Berestycki, L. Nirenberg, S.R.S. Varadhan, *The principal eigenvalue and maximum principle for second order elliptic operators in general domains*, Comm. Pure Appl. Math. **47** (1994), pp 47-92.

[11] M. Bramson, *Convergence of solutions of the Kolmogorov equation to travelling waves*, Memoirs Amer. Math. Soc. **44**, 1983.

[12] P. Clavin, *Premixed combustion and gasdynamics*, Ann. Rev. Fluid Mech. **26** (1994), pp 321-352.

[13] P. Clavin, F.A. Williams, *Theory of premixed flame propagation in large-scale turbulence*, J. Fluid. Mech. **90** (1979), pp 589-604.

[14] M. Donsker, S.R.S. Varadhan, *On a variational formula for the principle eigenvalue for operators with maximum principle*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **72** (1975), pp 780-783.

[15] P.C. Fife, *Mathematical aspects of reacting and diffusing systems*, Lecture Notes in Biomathematics **28**, Springer Verlag, 1979.

[16] P.C. Fife, J.B. McLeod, *The approach of solutions of non-linear diffusion equations to travelling front solutions*, Arch. Rat. Mech. Anal. **65** (1977), pp 335-361.

[17] R.A. Fisher, *The advance of advantageous genes*, Ann. Eugenics **7** (1937), pp 335-369.

[18] M. Freidlin, *Wave front propagation for KPP type equations*, In: Surveys in Appl. Math. **2**, Plenum, New York, 1995, pp 1-62.

[19] K.P. Hadeler, F. Rothe, *Travelling fronts in nonlinear diffusion equations*, J. Math. Biology **2** (1975), pp 251-263.

[20] F. Hamel, *Reaction-diffusion problems in cylinders with no invariance by translation, Part II : Monotone perturbations*, Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Lin. **14** (1997), pp 555-596.

[21] Ya.I. Kanel', *Certain problems of burning-theory equations*, Sov. Math. Dok. **2** (1961), pp 48-51.

[22] Y. Kan-On, *Parameter dependance of propagation speed of travelling waves for competition-diffusion equations*, SIAM J. Math. Anal. **26** (1995), pp 340-363.

[23] A.N. Kolmogorov, I.G. Petrovsky, N.S. Piskunov, *Etude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique*, Bull. Univ. d'Etat Moscou, Série internationale **A 1** (1937), pp 1-26.

[24] K. Mischaikow, V. Hutson, *Travelling waves for mutualist species*, SIAM J. Math. Anal. **24** (1993), pp 987-1008.

[25] N. Peters, F.A. Williams, *The asymptotic structure of stoichiometric methane-air flames*, Comb. Flame **68** (1987), pp 185-207.

[26] J-M. Roquejoffre, *Eventual monotonicity and convergence to travelling fronts for the solutions of parabolic equations in cylinders*, Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Lin. **14** (1997), pp 499-552.

[27] G. Rosen, *Generalization of the laminar flame action principle for Arrhenius-type rate functions*, J. Chem. Phys. **32** (1960), pp 311-312.

[28] A.N. Stokes, *On two types of moving front in quasilinear diffusion*, Math. Biosciences **31** (1976), pp 307-315.

[29] J.M. Vega, *Multidimensional travelling fronts in a model from combustion theory and related problems*, Diff. Int. Eq. **6** (1993), pp 131-155.

[30] J.M. Vega, *On the uniqueness of multidimensional travelling fronts of some semilinear equations*, J. Math. Anal. Appl. **177** (1993), pp 481-490.

[31] V.A. Volpert, A.I. Volpert, *Determination of the asymptotic of the combustion wave velocity by successive approximations*, J. App. Mech. Tech. Phys. **31** (1990), pp 680-686.

[32] A.I. Volpert, V.A. Volpert, V.A. Volpert, *Traveling wave solutions of parabolic systems*, Translations of Math. Monographs **140**, Amer. Math. Soc., 1994.

[33] F. Williams, *Combustion Theory*, Addison-Wesley, Reading MA, 1983.

[34] X. Xin, *Existence and uniqueness of travelling waves in a reaction-diffusion equation with combustion nonlinearity*, Idiana Univ. Math. J. **40** (1991), pp 985-1008.

[35] X. Xin, *Existence and stability of travelling waves in periodic media governed by a bistable nonlinearity*, J. Dyn. Diff. Eq. **3** (1991), pp 541-573.

[36] J.B. Zeldovic, D.A. Frank-Kamenetskii, *A theory of thermal propagation of flame*, Acta Physiochimica URSS **9** (1938), pp 341-350. English translation: in *Dynamics of curved fronts*, R. Pelcé Ed., Perspectives in Physics Series, Academic Press, New York 1988, pp 131-140.