Description de ma recherche récente.

Mes travaux de recherche portent essentiellement sur les équations cinétiques.
Les équations cinétiques apparaissent dans de nombreux domaines de physique mathématique, comme les plasmas, les gaz raréfiés, la physique de la matière condensée... Leur inconnue n'est pas la densité $\rho(t,x)$ dans l'espace physique, mais une densité $f(t,x,v)$ dans l'espace des phases. Elles s'écrivent

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = Q(f), \tag{0.1}$$

où Q est un opérateur (intégral, différentiel, ...) agissant sur la variable v.

1 L'équation de Boltzmann discrète en vitesses.

L'équation de Boltzmann est une équation du type (0.1) où $(t,x,v) \in [0,+\infty[\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$ et l'opérateur Q est l'opérateur de Boltzmann, intégral en vitesses. Le problème de Cauchy correspondant, i.e. avec une condition initiale donnée, a été résolu par R. DiPerna et P.-L. Lions en 1989 à l'aide de solutions renormalisées. Un point clé de leur démonstration est l'utilisation de lemmes de moyenne, qui permet de gagner en régularité lorsqu'on considére des moyennes en vitesses de la fonction de distribution f. Simultanément, de nombreuses recherches ont eu lieu sur la résolution de l'équation de Boltzmann discrète, approximation de l'équation de Boltzmann pour une fonction de distribution ne dépendant que d'un nombre fini de vitesses $(v_i)_{1\leq i\leq p}$. Si $f_i(t,x)$ désigne la fonction de distribution de vitesse i, le système à résoudre s'écrit

$$\partial_t f_i + v_i \cdot \nabla_x f_i = Q_i(f), \quad 1 \leq i \leq p, \tag{1.2}$$

où l'opérateur de collisions $(Q_i)_{1\leq i\leq p}$ est algébrique. On s'attend à ce que plus le nombre de vitesses considérées soit grand, meilleure soit l'approximation. Les lemmes de moyenne utilisés dans la résolution de l'équation de Boltzmann ne sont plus valables pour l'équation de Boltzmann discrète en vitesses. De plus, les résultats théoriques sur la résolution de l'équation de Boltzmann discrète depuis les années 1980 ont essentiellement porté sur le cas unidimensionnel en espace. En collaboration avec Leif Arkeryd, nous avons récemment obtenu des résultats d'existence de solutions stationnaires de différentes équations de Boltzmann à vitesses discrètes dans le plan:
- le modèle de Broadwell en deux dimensions d'espace. C'est un des modèles les plus simples, à 4 vitesses, d'équation de Boltzmann discrète,
- toute équation de Boltzmann discrète du plan à nombre quelconque de vitesses pointant dans le même demi-espace,
- toute équation de Boltzmann discrète du plan sans couple de vitesses colinéaires. Ce dernier

résultat fait l'objet du second article de la liste de publications.
A la place des lemmes de moyenne utilisés dans la résolution de l'équation de Boltzmann continue, nous avons eu recours à de la compacité dans l'espace L^1 des fréquences de collisions, ainsi qu'à la détermination de "bonnes" i-caractéristiques le long desquelles f_i est bornée et dont le complémentaire est de mesure arbitrairement petite.
Le problème de Cauchy, i.e. d'évolution avec une condition initiale donnée, et en dimension deux d'espace pour l'équation de Boltzmann discrète, est en cours de rédaction.

2 Equations cinétiques pour les plasmas de fusion.

En collaboration avec Philippe Ghendrih de l'IRFM (Institut de Recherche de la Fusion par confinement Magnétique) du CEA de Cadarache et Michel Mehrenberger de l'I2M (Institut de Mathématiques de Marseille) nous avons constitué un groupe de travail sur la dérivation de modèles utilisés pour étudier les plasmas du coeur des tokamaks. Des expériences sont effectuées dans les tokamaks comme celui d'ITER à Cadarache pour étudier le phénomène de la fusion contrôlée. Considérant un ensemble de N particules et l'évolution de la fonction densité de Klimontovich associée, nous avons décomposé cette dernière en une fonction densité à une particule et un terme de fluctuation. Négligeant les interactions cubiques, cela conduit à un système couplant les fonctions de distribution à une et à deux paritcules. Cette dérivation fait l'objet du premier preprint de la liste de publications. Le système couplé obtenu fait actuellement l'objet d'une analyse mathématique.