Année universitaire 2015/2016

Site : ☒ Luminy ☐ St-Charles ☐ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☐ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS

Sujet de : ☐ 1er semestre ☒ 2ème semestre ☒ Session 2 Durée de l'épreuve : 3h

Examen de : L3 Nom du diplôme : Licence de Mathématiques

Code du module : SMI6U5L Libellé du module : Géométrie differentielle

Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : NON

Exercice 1. *(***4p***)*

(1) *(***2p***) Définir la courbure et la torsion d'une courbe paramétrée birégulière γ.*
(2) *(***2p***) Définir les courbures principales et les directions principales d'une surface paramétrée $f : U \to \mathbb{R}^3$ en un point $(u_0, v_0) \in U$.*

Exercice 2. *(***13p***) On considère la surface paramétrée suivante de paramètres $R > r > 0$.*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} & \mapsto & f(u,v) = \begin{pmatrix} (R + r\cos u)\cos v \\ (R + r\cos u)\sin v \\ r\sin u \end{pmatrix} \end{array}$$

(1) *(***2p***) Calculer l'aire de l'image $S = f(\mathbb{R}^2) = f([0, 2\pi] \times [0, 2\pi])$.*
(2) *(***2p***) Pour un point $p \in S$, donner deux cercles distincts de $\mathbb{R}^3$, inclus dans S et passant par p. Déterminer l'angle formé par les droites tangentes (au point m) des deux cercles.*
(3) *(***1p***) Dessiner le support de la surface et les deux cercles passant par $p_0 = f(0, 0)$.*
(4) *(***2p***) Déterminer le champ normal de Gauss de f, la première et la seconde forme fondamentale de f en un point $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.*
(5) *(***1p***) Déterminer la courbure de Gauss et la courbure moyenne de f en un point $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.*
(6) *(***1p***) Déterminer les courbures principales et les directions principales de f en un point $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.*
(7) *(***2p***) Montrer que les courbes $t \mapsto f(t, v_0)$ sont des lignes géodésiques de f.*
(8) *(***2p***) Pour quelles valeurs de $u_0 \in \mathbb{R}$, la courbe $t \mapsto f(u_0, t)$ est une ligne géodésique de f ?*

Exercice 3. *(***9p***) On considère la surface paramétrée S donnée par*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} & \mapsto & f(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2 + v^2 - 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

(1) *(***2p***) Donner une base du plan tangent $T_{(u,v)}f$ et le vecteur normal de Gauss $n(u, v)$ en un point $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.*
(2) *(***2p***) Calculer la première et la seconde forme fondamentale de f en un point $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.*
(3) *(***2p***) Calculer la courbure de Gauss et la courbure moyenne de f en un point $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.*
(4) *(***2p***) Déterminer les courbures principales et les directions principales de f en un point $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.*
(5) *(***1p***) Donner la position locale de la surface par rapport au plan tangent au point $f(1, 1)$.*

Exercice 4. *(***4p***) Considérons la courbe paramétrée plane*

$$\begin{array}{ccc} [0, 2\pi) & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \gamma(t) = \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \cos t \end{pmatrix} \end{array}.$$

(1) *(***1p***) Déterminer les points multiples de f.*
(2) *(***1p***) Déterminer les points $t \in [0, 2\pi)$ où f n'est pas régulière.*
(3) *(***1p***) Calculer la courbure de Frenet en un point $t \in [0, 2\pi)$ où f est régulière.*
(4) *(***1p***) Dessiner l'image (le support) $C = \gamma(f)$ de f.*