AIX-MARSEILLE UNIVERSITÉ L3-S6- 2013-2014

Géométrie Différentielle – Examen Partiel, mars 2014

Aucun doccument n'est autorisé.

Exercice 1 (**4p**) Questions proches du cours

1. (**1p**) Écrire les formules intégrales faites en cours pour la longueur d'une courbe paramétrée $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ et pour l'aire d'une surface paramétrée $f : U \to \mathbb{R}^3$.
2. (**3p**) Énoncer le théorème d'existence et unicité pour le repère mobile de Frenet d'une courbe birégulière $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$. Démontrer l'existence.

Exercice 2 (**4p**) Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée plane régulière sur I et birégulière en $t_0 \in I$.

1. (**1p**) Montrer que $\kappa_\gamma(t_0) \neq 0$,
2. (**3p**) Rappeler la notion générale de centre osculateur et montrer que, si γ est et birégulière en t_0, alors elle admet un unique cercle osculateur en t_0 dont le centre est donné par

$$q_\gamma(t_0) = \gamma(t_0) + \frac{1}{\kappa_{\gamma_0}(t_0)} f_2(t_0)$$

Indication : Supposer $\gamma(t_0) = 0$ pour simplifier les calculs, et déterminer a, $b \in \mathbb{R}$, $R \in \mathbb{R}_+^*$ tel que le cercle de centre $q = af_1(t_0) + bf_2(t_0)$ et rayon R ait un contact d'ordre au moins 3 avec γ en t_0.

Exercice 3 9p On considère la courbe gauche $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, définie par

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix} \exp(t) \\ \exp(-t) \\ \sqrt{2}t \end{pmatrix} .$$

1. **1p** Calculer $\gamma'(t)$. Montrer que la courbe γ est régulière.
2. **1p** Calculer $\gamma''(t)$. Montrer que la courbe γ est birégulière.
3. **1p** Calculer $\gamma'''(t)$. Montrer que la courbe γ est trirégulière.
4. **3p** Déterminer le repère mobile de Frenet $f = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R} \to \mathrm{SO}(3)$ de γ.
5. **2p** Déterminer la courbure κ_γ et la torsion τ_γ de γ.
6. **1p** Déterminer le rapport $\frac{\tau_\gamma(t)}{\kappa_\gamma(t)}$ et montrer que l'application $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par $v(t) := \frac{\tau_\gamma(t)}{\kappa_\gamma(t)} f_1(t) + f_3(t)$ est constante.

Exercice 4 10p On considère le paraboloïde hyperbolique Π, d'équation $x_3 = x_1^2 - x_2^2$.

1. **1p** Dessiner la surface Π. *Indication : Étudier les intersections de Π avec les plans $x_3 = c$, $x_1 = c$, $x_2 = c$ (où $c \in \mathbb{R}$ est une constante).*
2. **1p** On pose $u_1 = x_1 - x_2$, $u_2 = x_1 + x_2$. En utilisant u_1, u_2 comme paramètres en déduire une paramétrisation $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de Π.
3. **1p** Vérifier que f est une immersion injective.
4. **1p** Déterminer la première forme fondamentale de f et ses coefficients $g_{ij}(u)$.
5. **1p** Expliciter le vecteur normal unitaire $n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.
6. **1p** Déterminer les coefficients $h_{ij}(u)$ de la seconde forme fondamentale de f.
7. **2p** Déterminer la matrice inverse $G(u)^{-1}$, la matrice de l'endomorphisme de Weingarten $l_u \in \mathrm{End}(T_u f)$ dans la base $(\partial_1 f(u), \partial_2 f(u))$ et les valeurs propres $\lambda_1(u)$, $\lambda_2(u)$ de cet endomorphisme.
8. **2p** Déterminer la courbure de Gauss $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et la courbure moyenne $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de f.