Année universitaire 2016/2017

Site : ☒ Luminy ☐ St-Charles ☐ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☐ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS
Sujet de : ☐ 1^{er} semestre ☒ $2^{\text{ème}}$ semestre ☐ Session 2 Durée de l'épreuve : 3h
Examen de : L3 Nom du diplôme : Licence de Mathématiques
Code du module : SMI6U5L Libellé du module : Géométrie Différentielle
Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : NON

Exercice 1 (**4p**) Définir les courbures principales et les directions principales d'une surface paramétrée $f : U \to \mathbb{R}^3$ en un point $(u_0, v_0) \in U$. Expliquer comment on détermine explicitement les courbures principales et les directions principales en utilisant la 1ère et la 2ème forme fondamentale.

Exercice 2 (**4p**) Soit $f : U \to \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée avec U connexe. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. Les courbures principales sont nulles en tout point $u \in U$,
2. L'endomorphisme de Weingarten est nul en tout point $u \in U$,
3. La deuxième forme fondamentale h est nulle en tout point $u \in U$,
4. L'application de Gauss $n : U \to \mathbb{R}^3$ (qui associe à un point $u \in U$ le vecteur normal standard $n(u)$) est constante,
5. L'image de f est contenue dans un plan affine $\pi \subset \mathbb{R}^3$ (f est une paramétrisation locale d'un plan).

Exercice 3 (**20p**) (L'hélicoïde) Considérons l'hélice circulaire $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ donnée par $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$.

1. (**3p**) Déterminer le repère mobile de Frenet $t \mapsto (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$, la courbure et la torsion de γ.
2. (**1p**) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ soit N_t *la normale principale* à γ au point t, i.e. la droite affine de direction $\mathbb{R}f_2(t)$ qui passe par $\gamma(t)$. Écrire l'équation paramétrique de N_t sous la forme $x = \eta_t(s)$, où $\eta_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ est une application affine qui sera précisée.
3. (**1p**) Pour chaque $s \in \mathbb{R}$ fixé, étudier la courbe paramétrée $\gamma_s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par $\gamma_s(t) := \eta_t(s)$. Préciser la nature de cette courbe selon les valeurs de s. Préciser les valeurs de s pour lesquelles γ_s est birégulière.
4. (**2p**) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par $f(s,t) = \eta_t(s)$. Montrer que f est une immersion injective.
5. (**2p**) Calculer l'aire de $f(D)$ où D est le disque $D := \{u \in \mathbb{R}^2 | \ \|u\| < 1\}$.
6. (**2p**) Soit (u_n) une suite de $\mathbb{R}^2$ et $u \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(u)$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} u_n = u$. En déduire que f est un plongement.
7. (**1p**) Montrer que $\mathrm{im}(f) = \{x \in \mathbb{R}^3 | \ \sin(x^3)x^1 - \cos(x^3)x^2 = 0\}$.
8. (**1p**) Montrer que $\mathrm{im}(f)$ est une sous-variété fermée de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$, en précisant la définition utilisée.
9. (**2p**) Calculer les matrices de la première et la seconde forme fondamentale de f en $u \in \mathbb{R}^2$.
10. (**1p**) Calculer la matrice de l'endomorphisme de Weingarten l_u de f en $u \in \mathbb{R}^2$.
11. (**2p**) Calculer les courbures principales, les directions principales, la courbure de Gauss et la courbure moyenne de f en $u \in \mathbb{R}^2$.
12. (**2p**) Déterminer les coefficients de Christoffel de première et de deuxième espèce de f.
Rappel : $\Gamma^l_{ik} = g^{lj}\Gamma_{ikj}$, $\Gamma_{ikj} = \Gamma_{kij} = \frac{1}{2}(g_{ij,k} + g_{jk,i} - g_{ki,j})$