Année universitaire 2016/2017

Site : ☒ Luminy ☐ St-Charles ☐ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☐ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS

Sujet de : ☐ 1er semestre ☒ 2ème semestre ☒ Session 2 Durée de l'épreuve : 3h

Examen de : L3 Nom du diplôme : Licence de Mathématiques

Code du module : SMI6U5L Libellé du module : Géométrie Différentielle

Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : NON

Exercice 1 (**4p**) (Questions proches du cours) Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe birégulière, soit

$$I \ni t \mapsto (f_1(t), f_2(t), f_3(t)) \in \mathrm{SO}(3)$$

son repère mobile de Frenet, et soit $\tau_\gamma : I \to \mathbb{R}$ sa torsion. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe un plan affine $\pi \subset \mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{im}(\gamma) \subset \pi$.
2. $\tau_\gamma = 0$.
3. L'application $t \mapsto f_3(t)$ est constante.

Exercice 2 (**6p**) Considérons un parallélipipède rectangle $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ et notons par x, y, $z \in]0, +\infty[$ les longueurs de ses cotés.

1. (1p) Exprimer la surface $S(x, y, z)$ et le volume $V(x, y, z)$ de Π en fonction de x, y, z.
2. (1p) Soit $v_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}_+^*)^3$. Calculer les différentielles $d_{v_0}S$, $d_{v_0}V$ et les gradients $\nabla_{v_0}S$, $\nabla_{v_0}V$ des applications S et V.
3. (3p) Soit $\sigma_0 \in \mathbb{R}_+^*$. En utilisant le théorème des multiplicateurs de Lagrange étudier le problème d'extrema liés associé à l'application V et à la liaison $S(x, y, z) = \sigma_0$. Préciser s'il s'agit d'un point de minimum ou maximum.
4. (1p) Quelle est l'interprétation géométrique de votre résultat ?
5. (2p) Soit $\sigma_0 \in \mathbb{R}^*$. Montrer que le sous-ensemble $\{x \in \mathbb{R}^3 |\ 2(xy+xz+yz) = \sigma_0\}$ est une sous-variété fermée de $\mathbb{R}^3$. Citer soigneusement la définition utilisée.

Exercice 3 (**12p**) Considérons deux nombres réels $0 < a < b$ et la surface de révolution T obtenu en faisant tourner un cercle de rayon a autour de l'axe Ox_3 tel que le centre du cercle mobile décrit un cercle de rayon b dans le plan x_1Ox_2. Une telle surface est paramétrée par l'immersion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$f(u, v) = \begin{pmatrix} (b + a\cos u)\cos v \\ (b + a\cos u)\sin v \\ a\sin u \end{pmatrix} .$$

1. (2p) Calculer l'aire de la surface $f([0, 2\pi] \times [0, 2\pi])$.
2. (1p) Que représentent géométriquement les courbes $C_1 = \{f(0, v)|\ v \in \mathbb{R}\}$ et $C_2 = \{f(u, 0)|\ u \in \mathbb{R}\}$?
3. (1p) Montrer que les vecteurs tangents à ces courbes au point d'intersection $m = f(0, 0)$ sont orthogonaux.
4. (3p) Calculer en tout point $(u, v) \in [0, 2\pi[\times [0, 2\pi[$ la première et la seconde forme fondamentale $h(u, v)$, ainsi que les courbures principales, directions principales et les vecteurs unitaires w_1, w_2 correspondants.
5. (3p) Calculer la courbure de Gauss $K(u, v)$ et la courbure moyenne $H(u, v)$. Déterminer les points $(u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pour lesquels
   (a) $K(u, v) > 0$,
   (b) $K(u, v) < 0$,
   (c) $K(u, v) = 0$,
6. (2p) Préciser les ensembles $T_+ \subset T$, $T_- \subset T$, $T_0 \subset T$ des points $m = f(u, v) \in T$ qui correspondent respectivement à chacune des trois conditions ci-dessus. Interpréter géométriquement ces résultats.