Géométrie Différentielle – TD n°4 : Teorema Egregium. Dérivation covariante. Géodésiques.

Exercice 1 Soit $f : U \to \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée, $c := f \circ \gamma : I \to S$ une courbe sur $S := \mathrm{im}(f)$ et $X : I \to \mathbb{R}^3$ un champs de vecteurs tangents le long de γ. Montrer que pour toute fonction différentiable $\alpha : I \to \mathbb{R}$ on a

$$\frac{\nabla(\alpha(t)X(t))}{dt} = \alpha'(t)X(t) + \alpha(t)\frac{\nabla X(t)}{dt} \ .$$

Exercice 2 Considérons la surface de révolution associée à une fonction $r : I \to]0, \infty[$, donc la surface obtenue en faisant tourner la courbe d'équation $x^2 = r(x^3)$ (dans le plan x_2Ox_3) autour de l'axe Ox^3. Remarquer d'abord que cette surface est définie par l'équation implicite $(x^1)^2 + (x^2)^2 = r^2(x^3)$ et que

$$f(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} r(u^1)\cos u^2 \\ r(u^1)\sin u^2 \\ u^1 \end{pmatrix}$$

définit une paramétrisation de cette surface.

1. Déterminer les éléments $g^{ij}(u)$ de l'inverse $\mathbf{G}(u)^{-1}$ de la matrice de la première forme fondamentale.
2. Déterminer les coefficients de Christoffel de première et de deuxième espèce de f.
3. Calculer les fonctions R^m_{112} ($m \in \{1, 2\}$) définies en cours et la composante R_{1212} du tenseur de courbure de f (en utilisant la définition de cette composante). Comparer le résultat obtenu avec le déterminant $\det(\mathbf{H}) = h_{11}h_{22} - h_{12}^2$ de le seconde forme fondamentale. Quel résultat général fait en cours nous permet d'affirmer sans calcul que $R_{1212} = \det(\mathbf{H})$?
4. Fixons $h_0 \in \mathbb{R}$ et considérons la courbe paramétrée sur f donnée par $c = f \circ \gamma : \mathbb{R} \to S$, où $\gamma(t) = (h_0, t)$. Une telle courbe s'appelle parallèle de la surface de révolution $S = \mathrm{im}(f)$.
   (a) Calculer $c'(t)$ et la dérivation covariante $\frac{\nabla c'(t)}{dt}$.
   (b) Montrer que c est une géodésique de f si et seulement si $r'(h_0) = 0$, donc si et seulement si h_0 est un point critique de la fonction r.
5. Fixons $\theta_0 \in \mathbb{R}$ et considérons la courbe paramétrée sur f donnée par $c = f \circ \gamma : I \to S$, où $\gamma(t) = (t, \theta_0)$. Une telle courbe s'appelle méridien de la surface de révolution $S = \mathrm{im}(f)$.
   (a) Calculer $c'(t)$ et la dérivation covariante $\frac{\nabla c'(t)}{dt}$.
   (b) Montrer que $\frac{\nabla c'(t)}{dt} \in \mathbb{R}c'(t)$ pour tout $t \in I$. En déduire que pour tout changement de variable $\phi : J \to I$, en posant $\tilde{c} := c \circ \phi$ on a encore $\frac{\nabla \tilde{c}'(s)}{ds} \in \mathbb{R}\tilde{c}'(s)$ pour tout $s \in J$.
   (c) Soit $\phi : J \to I$ un changement de variable tel que $\|\tilde{c}'\|$ est constante. Montrer que $\tilde{c}$ est une géodésique de f. *Conclusion : tout méridien paramétré à vitesse de norme constante est une géodésique.*
6. Écrire l'équation différentielle des géodésiques de f.
7. Étudier en détail les questions précédentes dans les cas particulier $r(x_2) = r_0$ (une constante), et $r(x_2) = ax_2$ (où $a > 0$ et r est définie sur $\mathbb{R}^*_+$). Remarquer que la surface de révolution obtenue dans le premier cas est un cylindre de révolution et la surface de révolution obtenue dans le deuxième cas est un cône de révolution. Décrire explicitement les géodésiques d'un cylindre de révolution.

Exercice 3 Soit $f : U \to \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée. Supposons que la première forme fondamentale de f est diagonale, c'est à dire la matrice des $\mathbf{G}(u) = (g_{ij}(u))_{1\leq i,j\leq 2}$ des coefficients s'écrit sous la forme

$$\mathbf{G}(u) = \begin{pmatrix} a(u^1, u^2) & 0 \\ 0 & b(u^1, u^2) \end{pmatrix} ,$$

où a, $b : U \to \mathbb{R}_+^*$ sont des fonctions différentiables.

1. Écrire des formules explicites pour les coefficients de Christoffel de première et deuxième espèce de f.
2. En utilisant le Teorema Egregium écrire une formule explicite pour la courbure de Gauss de f,
3. Montrer que la première forme fondamentale de la paramétrisation $f : \mathbb{R}^2 \to S^2 \setminus \{N\}$ de la sphère privée de $N := (0, 0, 1)$ donnée par

   $$f(u) := \frac{1}{\|u\|^2 + 1} \begin{pmatrix} 2u^1 \\ 2u^2 \\ \|u\|^2 - 1 \end{pmatrix} .$$

   (l'inverse de la projection stéréographique de centre N) est bien diagonale, spécifier les fonctions a, $b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+^*$ et écrire explicitement les coefficients de Christoffel dans ce cas.

Exercice 4 Soit $f : U \to \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée telle que $S := \mathrm{im}(f) \subset S^2$.

1. Soit $c = f \circ \gamma : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée sur S de vitesse à norme constante telle que $\mathrm{im}(c)$ est contenue dans un grand cercle de S^2. En utilisant la définition, montrer que c est une géodésique de f.
2. Réciproquement, montrer que l'image de pour toute géodésique $c = f \circ \gamma$ de f este contenue dans un grand cercle de S^2. *Indication : Montrer que l'application $c \wedge c' : I \to \mathbb{R}^3$ est constante ; en déduire que l'image de c est contenue dans un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$.*
3. Considérons de nouveau la paramétrisation $f : \mathbb{R}^2 \to S^2 \setminus \{N\}$ de la sphère privée de $N := (0, 0, 1)$ donnée par

   $$f(u) := \frac{1}{\|u\|^2 + 1} \begin{pmatrix} 2u^1 \\ 2u^2 \\ \|u\|^2 - 1 \end{pmatrix} .$$

   (l'inverse de la projection stéréographique de centre N). Écrire explicitement toutes les courbes paramétrées $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ qui correspondent aux géodésiques de f et décrire explicitement les images de ces courbes.

Exercice 5 Soit $U \subset \mathbb{R}^2$, $\psi : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable, et

$$\Gamma_\psi := \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \psi(u_1, u_2) \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in U \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

son graphe.

1. Donner une paramétrisation naturelle $f : U \to \mathbb{R}^3$ de Γ_ψ, préciser la coefficients de la première et la seconde forme fondamentale de la surface paramétrée f et calculer la matrice inverse $\mathbf{G}(u)^{-1} = (g^{ij}(u))_{1\leq i,j\leq 2}$ de $\mathbf{G}(u)$.
2. * Donner des formules explicites pour les coefficients de Christoffel de première et deuxième espèce de f.
3. * Donner des formules explicites pour les fonctions R^m_{112} introduite en cours et pour R_{1212} en utilisant la définition de cette fonction. Comparer $R_{1212}(u)$ avec $\det(H(u))$.
4. Étudier le cas particulier de l'application $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $\psi(u_1, u_2) := u_1^2 + u_2^2$. Préciser la surface Γ_ψ dans ce cas et écrire l'équation différentielle des géodésiques de f.