Géométrie Différentielle – TD n°1: L'espace euclidien standard $\mathbb{R}^n$. Courbes paramétrées.

Exercice 1 Trouver l'équation du plan passant par le point $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ normal au vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 Trouver l'équation du plan qui passe par le point $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ et qui est paralèlle au plan d'équation $2x + 4y - z = 6$.

Exercice 3 Trouver un vecteur orthogonal à $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Décrire la droite qui passe par le point $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ parallèle à ce vecteur.

Exercice 4 Décrire la droite d'intersection des plans $4x - 3y + 2z + 5 = 0$ et $3x + 2y - z + 11 = 0$ en donnant un système d'équations paramétriques.

Exercice 5 Soit $p = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $q = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $s = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ trois points dans $\mathbb{R}^3$. Trouver les vecteurs $\overrightarrow{pq}$ et $\overrightarrow{ps}$, et ensuite l'équation du plan qui passe par ces points. *Indication: Utiliser le produit vectoriel pour déterminer un vecteur normal au plan cherché.*

Exercice 6 Trouver la mesure de l'angle formé par les plans $x + y + z = -1$ et $x - y = 1$. Représenter ces deux plans sur un dessin.

Exercice 7 Trouver un système d'équations paramétriques (donc un paramétrage) et un système d'équations cartesiennes implicites (donc un système d'équations de la forme $F(x, y, z) = 0$ qui définit l'objet géométrique donné) pour les objets géométriques suivants :

1. la droite de $\mathbb{R}^3$ qui passe par les points $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$;
2. le plan normal au vecteur $n = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et qui passe par le point $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;
3. le plan qui passe par les points $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 8 (*Symétries*)

1. Soit $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Soit $d \subset \mathbb{R}^n$ la droite vectorielle $d = \mathbb{R}v$ (donc la droite d'équation paramétrique $x(t) = tv$) et $p \subset \mathbb{R}^n$ le hyperplan vectoriel d'équation implicite $\langle v, x \rangle = 0$. Écrire explicitement les symétries $x \mapsto s_d(x)$, $x \mapsto s_p(x)$ par rapport à d et p en précisant les matrices de ces applications linéaires.
2. Les mêmes questions pour la droite affine $\delta := x_0 + d$ et le hyperplan affine $\pi := x_0 + p$.
3. Soient $(e_1, \dots, e_k)$ une famille orthonormale de $\mathbb{R}^n$ et a le sous-espace vectoriel engendré par cette famille. Écrire explicitement la formule qui définit la projection orthogonale sur a et la formule qui définit la symétrie par rapport à a.

4. Les mêmes questions pour le sous-espace affine $\alpha := x_0 + a$. Pour quelles valeurs de k la symétrie s_α par rapport à un sous-espace affine k-dimensionnel α préserve l'orientation de $\mathbb{R}^n$?

5. Soient δ_1, δ_2 deux droites affines de $\mathbb{R}^2$. Montrer que la composition $s_{\delta_2} \circ s_{\delta_1}$ est soit une rotation, soit une translation.

Exercice 9 Enoncer et démontrer le théorème de classification des isométries de $(\mathbb{R}^2, d_{\mathrm{can}})$. Enoncer et démontrer le théorème de classification des isométries de $(\mathbb{R}^3, d_{\mathrm{can}})$. *Indication: Démontrer d'abord la proposition suivante: Soit f une isométrie f de $(\mathbb{R}^n, d_{\mathrm{can}})$ écrite sous la forme $f(x) = Ax + x_0$, où $A \in \mathrm{O}(n)$, et soit $F_0 := \ker(A - I_n)$.*

(1) Il existe un unique sous-espace affine $F \subset \mathbb{R}^n$ de direction F_0 qui est stable par f (i.e. tel que $f(F) = F$).

(2) Il existe une unique paire $(g, v) \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n, d_{\mathrm{can}}) \times E$ telle que $\mathrm{Fix}(g) \neq \emptyset$ et $f = \tau_v \circ g = g \circ \tau_v$. Cette paire a les propriétés suivantes:

(a) $\mathrm{Fix}(g) = F$, en particulier $\mathrm{Fix}(g)$ est un sous-espace affine de direction F_0,

(b) $v \in F_0$.

Exercice 10 En utilisant la définition donnée dans le cours rédigé calculer la longueur de

1. du cercle $C(a, R)$.

2. de l'arc de parabole $\{(x, \frac{x^2}{2}) |\ x \in [0, 1]\}$. *Indication: Attention à l'intégrale $\int \sqrt{1+x^2}dx$. Utiliser une intégration par parties et l'intégrale connue $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$.*

3. L'arc de la spirale d'Archimède donné par l'équation polaire $r = \alpha\theta$ correspondant à l'intervalle $[2n\pi, 2(n+1)\pi]$,

4. de l'arc d'hélice $\left\{ \begin{pmatrix} R\cos(t) \\ R\sin(t) \\ \alpha t \end{pmatrix} \middle|\ t \in [a, b] \right\}$.

Exercice 11 Pour les les courbes planes paramétrées définies dans les exemples 1. – 7. du cours rédigé déterminer (en donnant des formules explicites):

1. La droite tangente et la droite normale en chaque point $t \in I$,

2. Le repère mobile de Frenet,

3. La courbure,

4. Le rayon de courbure et le cercle osculateur.

5. Dans le cas où c'est possible, étudier la monotonie et les extrémums (les minimums et les maximums locaux) de la fonction $t \mapsto \kappa_\gamma(t)$.

Exercice 12 Déterminer le plan osculateur de l'hélice (voir l'exemple 8 du cours rédigé) en un point $t \in \mathbb{R}$. Écrire un système d'équations paramétriques et une équation implicite pour ce plan.

Exercice 13 Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*_+$. Déterminer tous les paramétrages $\gamma : \mathbb{R} \to C(0_{\mathbb{R}^2}, R)$ du cercle de rayon $R > 0$ et centre $0_{\mathbb{R}^2}$ telle que $\|\gamma'(t)\| = \alpha$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (donc tous les paramétrages de vitesse scalaire constante α). *Indication: Montrer que γ doit être soit une solution de l'équation différentielle ordinaire d'ordre 1 $\gamma'(t) = \frac{\alpha}{R} R_{\frac{\pi}{2}}\gamma(t)$, soit une solution de l'équation différentielle $\gamma'(t) = -\frac{\alpha}{R} R_{\frac{\pi}{2}}\gamma(t)$. Dans chaque cas réduire l'équation différentielle vectorielle d'ordre 1 obtenue à une équation différentielle scalaire d'ordre 2.*

Exercice 14 Soient α, $\beta \in \mathbb{R}^+$. Déterminer les courbes planes paramétrées $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ telles que pour tout $t \in \mathbb{R}$ $\|\dot\gamma(t)\| = \alpha$ et $\|\ddot\gamma(t)\| = \beta$. Il s'agit donc de la classification des paramétrages dont la vitesse scalaire et l'accélération scalaire sont constante. *Indication: Utiliser l'exercice précédent.*

Exercice 15 Soit $\kappa_0 \in \mathbb{R}$. Déterminer les courbes planes paramétrées régulières $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ de courbure constante κ_0. *Indication: Classifier d'abord les courbes normales de courbure constante κ_0.*