UNIVERSITÉ AIX MARSEILLE
UFR SCIENCES
15 mars 2016

Licence Mathématiques 3: Géométrie différentielle

Durée 2h

Aucun document autorisé, calculatrices et téléphones interdits.
Barème sur 30p.

Exercice 1. *(**4p**)*

1. *(**2p**) Énoncer le théorème de Gram Schmidt.*
2. *(**2p**) Donner la définition de l'abscisse curviligne de centre $t_0 \in I$ d'une courbe paramétrée définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et montrer qu'elle définit une application strictement croissante $I \to J$.*

Exercice 2. *(**10p**) On considère la courbe paramétrée $\gamma :]-1,1[\to \mathbb{R}^2$ donnée par $t \mapsto \begin{pmatrix} \frac{t^2}{t-1} \\ \frac{t}{t^2-1} \end{pmatrix}$.*

1. *(**2p**) Calculer $\gamma'(t)$, $\gamma''(t)$, $\|\gamma'(t)\|$, et justifier que γ est une courbe régulière.*
2. *(**2p**)Préciser la droite tangente et la droite normale à γ en un point $t \in]-1,1[$. Pour quelles valeurs de t la tangente $\tau_\gamma(t)$ est verticale (parallèle à l'axe Oy)?*
3. *(**2p**) Déterminer le repère mobile de Frenet de γ, la courbure $\kappa_\gamma(t)$, et préciser le centre et le rayon du cercle osculateur à γ en un point $t \in]-1,1[$.*
4. *(**1p**) Donner le sens de variations, le signe, et les points extrémaux des fonctions coordonnées $t \mapsto x(t)$, $t \mapsto y(t)$ de γ. Montrer que tout point de $\mathrm{im}(\gamma)$ est un point simple (i.e. que γ est injective).*
5. *(**1p**) Calculer les limites*
$$\lim_{t \searrow -1} x(t),\ \lim_{t \searrow -1} y(t).$$
Utiliser votre résultat pour montrer que $\mathrm{im}(\gamma)$ admet une asymptote verticale, qu'on va préciser. Déterminer l'intersection de cette asymptote avec $\mathrm{im}(\gamma)$.
6. *(**1p**) Calculer les limites*
$$\lim_{t \nearrow 1} x(t),\ \lim_{t \nearrow 1} y(t),\ l := \lim_{t \nearrow 1} \frac{y(t)}{x(t)},\ a := \lim_{t \nearrow 1} \big(y(t) - l x(t)\big).$$
Utiliser votre résultat pour montrer que $\mathrm{im}(\gamma)$ admet une asymptote oblique, qu'on va préciser. Quelle est la position de $\mathrm{im}(\gamma)$ par rapport à cette asymptote?
7. *(**1p**) Tracer $\mathrm{im}(\gamma)$ dans un système de coordonnées.*

Exercice 3. *(**7p**) On considère la courbe paramétrée $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ donnée par $t \mapsto \begin{pmatrix} 1 + 6\mathrm{ch}(t) + 3\mathrm{sh}(t) \\ 2 + 3\mathrm{ch}(t) - 2\mathrm{sh}(t) \\ 1 - 2\mathrm{ch}(t) + 6\mathrm{sh}(t) \end{pmatrix}$.*

1. *(**1p**) Montrer que γ est birégulière. Est-elle trirégulière?*
2. *(**2p**) Donner le repère mobile de Frenet de γ.*
3. *(**2p**) Déterminer la courbure et la torsion de γ.*
4. *(**1p**) Déterminer le plan osculateur de γ en un point $t \in \mathbb{R}$. Que remarquez-vous concernant ce plan?*
5. *(**1p**) Montrer que γ est contenue dans un plan affine de $\mathbb{R}^3$, plan qu'on va préciser.*

Exercice 4. *(**4p**) On considère l'ensemble $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$ avec $0 < a < b$.*

1. *(**0,5p**) Montrer que $t \mapsto \begin{pmatrix} a\cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$ est une paramétrisation de cet ensemble.*
2. *(**1,5p**) Déterminer la courbure, le centre et le rayon du cercle osculateur de cette courbe paramétrée en un point $t \in [0, 2\pi]$.*
3. *(**1p**) Trouver les points t où la courbure est maximale, et les points où la courbure est minimale.*
4. *(**1p**) Donner une formule intégrale pour la longueur de la courbe.*

Exercice 5. *(**5p**) On considère l'ensemble $S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| z = x^2 - y^2 \right\}$.*

1. *(**1p**) Trouver une surface paramétrée $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$ dont l'image est S .*
2. *(**1p**) Préciser le plan tangent $T_u f$ et le vecteur normal de Gauss $n(u)$ à f en un point $u \in \mathbb{R}^2$.*
3. *(**1p**) Donner une équation implicite du plan tangent $T_u f$.*
4. *(**1p**) Calculer la première forme fondamentale de la surface paramétrée f.*
5. *(**1p**) En étudiant l'intersection de S avec les plans $x = c$, $y = c$, $z = c$ avec $c \in \mathbb{R}$, dessiner cet ensemble.*